الهندسه

النظريه والعمليه

تاليف

عثمان لبيب و عبدالواحد حمدى

مدرس رياضه بالمدرسه الخديويه — مدرس رياضه

(مقرر السنه الاولى الثانويه)

موافق لآخر پروگرام وضعته نظارة المعارف العموميه

قد تفضل بمراجعته حضرة اسماعيل بك حسنين

ناظر مدرسة المعلمين الخديويه

الطبعه الثانيه سنة ١٩٠٩

الهندسة

النظريه والعمليه

تاليف

عثمان لبيب و عبدالواحد حمدى

مدرس رياضه بالمدرسه الخديويه — مدرس رياضه

(مقرر السنه الاولى الثانويه)

موافق لآخر بروغرام وضعته نظارة المعارف العموميه

قد تفضل بمراجعته حضرة اسماعيل بك حسنين

ناظر مدرسة المعلمين الخديويه

الطبعه الثانيه سنة ١٩٠٩

بسم الله الرحمن الرحيم

نحمدك مبدع الكائنات على نعمة العقل ٭ كما نشكرك على هذا الفضل ٭ ونصلّي ونسلّم على رسلك الهادين الى الصراط المستقيم

(وبعد) فهذا كتاب وضعناه في علم الهندسة ٭ تحرينا فيه كل اسلوب يقربه الى فهم طالبيه ٭ فان جاء وفق ما قصدنا فذلك ما أردنا ٭ فالله نسأل أن يكون له حسن الوقع ٭ وان يعمّ به النفع آمين

البديهيات

١ البديهية - حقيقة واضحة بذاتها مثل

الواحد نصف الاثنين

النار محرقة

الولد ابن أمه

الانسان يسمع باذنيه

الارض تحتنا والسماء فوقنا

٢ الشيآن المساوى كل منهما لشئ واحد يكونان متساويين

٣ الشيآن اللذان ليس احدهما مساويا للثانى ولا اصغر منه يكونان مختلفين وأولهما اكبر

٤ الكل يساوى مجموع أجزائه

٥ الكل أكبر من جزئه

٦ الشيآن المتساويان
اذا زيد على كل منهما مقدار واحد
„ طرح من „ „ „ „
„ ضرب كل منهما فى „ „
„ قسم كل منهما على „ „
كان الناتجان متساويين

٧ الشيآن المختلفان { اذا زيد على كل منهما مقدار واحد / « طرح من كل منهما » « / « ضرب كل منهما فى » « / « قسم كل منهما على » « } كانا الناتجان مختلفين وناتج الاكبر اكبر

٨ كل ثلاثة أشياء اولها اكبر من الثانى وثانيها اكبر من الثالث يكون اولها اكبر من الثالث ، وتوجد بديهيات كثيرة غير ماذكر

تعاريف

٩ الدعوى - كل قول لا يمكن تصديقه الا بدليل كدعوى الطالب معرفة درسه ومعرفة علم الطب وكدعاوى المحاكم

١٠ الدعوى الهندسية قسمان نظرية وعملية

١١ النظرية - حقيقة تثبت صحتها بدليل نظرى (عقلى)

١٢ العملية - حقيقة تتضح بالعمل وباقامة الدليل النظرى على صحة هذا العمل

١٣ الدعوى لا بد ان تشتمل على مفروض ومطلوب

١٤ مفروض الدعوى - المسلمة صحته

١٥ مطلوب الدعوى - ما يراد البرهنة على صحته

١٦ الفرع - حقيقة تستنتج من نظرية أو نظريات تقدمتها

الجسم والسطح والخط والنقطه

١٧ الجسم – مايشغل محلا وله ابعاد ثلاثة طول وعرض وارتفاع وتطلق احيانا لفظة سمك على العرض وعمق على الارتفاع مثل قطعة الطباشير فانها تشغل محلاً في الفضاء كما تشغل محلا داخل كوب ماء

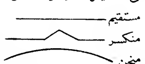
١٨ السطح – مايتصور نهايةً للجسم وله بعدان طول وعرض فقط

١٩ الخط – مايتصور نهاية للسطح وله بعد واحد وانواعه ثلاثة مستقيم ومنكسر ومنحن

٢٠ المستقيم – هو اقرب بعد بين نقطتين كالشعرة المشدودة وان كانت في ذاتها جسماً

٢١ المنكسر – مايتركب من مستقيمين فاكثر ليست على استقامة واحدة

٢٢ المنحنى – ماليس مستقيماً ولا منكسراً



(شكل ١)

٢٣ النقطة – مايتصور نهاية للخط وليس لها بعد

الخط – يتركب من جملة نقط

٢٤ الشكل الهندسى - كل صورة ترسم لبيان حقيقة هندسية

٢٥ الشكلان يكونان متساويين متى أمكن انطباق أحدهما على الثانى انطباقا تاما فى جميع أجزائهما

٢٦ الهندسة - علم يبحث فيه عن خواص الاشكال وقياسها

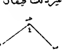
الزوايا

٢٧ الزاوية - هى الانفراج الواقع بين مستقيمين خارجين من نقطة واحدة (ش ٢) وهذه النقطة تسمى رأس الزاوية والمستقيمان يسميان ضلعيها

كيفية قراءة الزاوية

١٨ تقرأ الزاوية بثلاثة أحرف بحيث يكون حرف الرأس فى الوسط فيقال زاوية ب ﺣ ء أو زاوية ء ﺣ ب (ش٢)

٢٩ وتقرأ أحيانا بحرف الرأس فقط اذا كانت مفرده او برقم داخلها اذا كانت غير ذلك فيقال زاوية ﺣ او زاوية ٤



٣٠ المستوى - (السطح المستوى) هو ما ليس فيه انخفاض ولا ارتفاع بحيث ينطبق عليه المستقيم تماماً فى جميع الجهات مثل

سطح المرآة وسطح الماء الراكد وسطح الحائط الأملس.

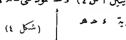
٣١ الزاويتان المتجاورتان - هما زاويتان فى مستو واحد على جانبى ضلع مشترك بينهما وراسهما واحد مثل زاويتى هـ ب ء ، ء ب هـ



(شكل ٣)

العمود

٣٢ العمود على مستقيم - كل مستقيم يصنع معه زاويتين متجاورتين متساويتين (ش ٤) ء هـ عمود على ب هـ لأن زاوية ب هـ ء = زاوية ء هـ هـ



(شكل ٤)

٣٣ المائل على مستقيم - كل مستقيم يصنع معه زاويتين متجاورتين غير متساويتين

٣٤ الزاوية القائمة - ما كان أحد ضلعيها عمودا على الثانى مثل زاوية ب هـ ء أو زاوية ء هـ هـ (ش ٤)

وأحدة الزوايا (الدرجه)

قد اصطلحوا على تقسيم القائمة الى تسعين زاوية متساوية كل منها

تسمى درجه
الواحده التى تقدر بها الزوايا هى الدرجـه
٣٥ الزاويه الحاده - ماكانت اصغـرمن القائمه (ش ٥)


(شكل ٥)

٣٦ الزاويه المنفرجـه - ماكانت أكبـرمن القـائمه (ش ٦)


(شكل ٦)

علامات تستعمل للاختصار فى الكتابـة

هذه العلامه ∠ يتلفظ بها زاويه
" " △ " " مثلث
" " ⊥ " " عمود على
" " ‖ " " يوازى
" " ╪ " " يساوى ويوازى
" " ق " " قـائمه

تمرينات على البديهيات

١ عمر زيد يعادل عمر خالد اما بكر فهو أصغر سنا من خالد والمطلوب المقارنة بين عمر زيد وبكر مع ذكر نص البديهيه

٢ ثروة زيد تعادل ثروة خالد وثروة خالد تعادل ثروة بكر والمطلوب المقارنة بين ثروة زيد وبكر مع ذكر نص البديهيه

٣ النقط ا ، ب ، حـ ، ء ا ب حـ ء مفروضه على مستقيم واحد بحيث أن ا ب = ب حـ = حـ ء والمطلوب اثبات أن ا حـ = ب ء على شرط أن يكون الاثبات بثلاثة أساليب مختلفه كل اسلوب منها مبنى على بديهيه مغايره للاخرى مع ذكر نص كل بديهيه

٤ اذا كان ا اكبر من ب ، ب أكبر من حـ فماذا يستنتج من ذلك مع ذكر نص البديهيه

٥ اذا فرض مستقيم مثل اب ونصف بنقطه مثل حـ ثم مد على امتداده من جهة ب الى أى نقطه مثل ء فاثبت أن حـ ء = $\frac{\text{ا ء + ب ء}}{٢}$ مع ذكر نص كل بديهيه ترتكز عليها فى الاثبات

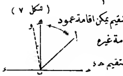
٦ المستقيم ا اكبر من ب والمستقيم ء = حـ والمطلوب مقارنة الفرق بين ا ، ء بالفرق بين ب ، حـ

٧ اذا نصفت الزاويه ب ا حـ بمنصف مثل اء ثم مد من ا أى مستقيم داخل الزاوية مثل اهـ فاثبت ان د ء اهـ = $\frac{\text{د حـ اهـ - د ب اهـ}}{٢}$

٣٧ بديهية - الشيآن المختلفان اذا كبر اصغرهما تدريجا مع الاستمرار وصغر اكبرهما كذلك لابد ان يصيرا متساويين

نظريه ١

(شكل ٧)



٣٨ من نقطه مفروضه على مستقيم يمكن اقامة عمود على هذا المستقيم ولا يمكن اقامة غيره

المفروض - نقطة ب على المستقيم حد

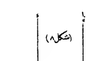
المطلوب اثباته { (١) يمكن اقامة عمود عليه من هذه النقطه
(٢) لا يمكن اقامة غيره }

برهان (١) - نمد مستقيما حيثما اتفق مثل ب ا يصنع مع حد الزاويتين حـ ب ا ، ا ب د ولتكن الاولى أصغر من الثانيه ثم نتصور دوران المستقيم ا ب حول نقطة ب في اتجاه السهم فنرى ان الزاويه الصغرى حـ ب ا تأخذ في الكبر شيأ فشيأ والزاويه الكبرى ا ب د تأخذ في الصغر شيأ فشيأ ومن حيث أن الزاويه الصغرى تكبر والكبرى تصغر فلا بد أن تصيرا متساويتين (٣٧) وحينئذ يأخذ المستقيم ب ا وضعا مثل ب هـ يكون فيه عموداً على حـ د (٣٣) وهو المطلوب

برهان (٢) لا يمكن اقامة عمود آخر لان كل مستقيم غير ب هـ مثل ب و لا يصنع مع حـ د زاويتين متجاورتين متساويتين واذاً لا يكون عموداً وهو المطلوب

نظريه ٢

٣٩ الزوايا القائمه كلها متساويه



(شكل٨)

المفروض - د ا ب هـ قائمه

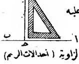
ـا د ء هـ و قائمه (ش٨)

المطلوب اثبات د ا ب هـ = د ء هـ و

البرهان - نطبق القائمه ا ب هـ على القائمه ء هـ و بان نطبق أولا ب هـ على هـ و بحيث تقع نقطة ب على هـ فينطبق ب ا على هـ ء وان لم ينطبق عليه امكن اقامة عمودين من نقطة هـ على هـ و وهو خُلف (٣٨) اذن لابد من انطباق ا ب على هـ ء ونكون د ا ب هـ = د ء هـ و وهو المطلوب

عمليه ١

(شكل٩)



٤٠ المطلوب اقامة عمود على مستقيم معلوم من نقطه مفروضه عليه

المفروض - مستقيم آ ب ونقطة هـ عليه

المطلوب - اقامة عمود من هـ على اب

العمل - نضع رأس القائمه من المثلث القائم الزاويه (احد الات الرسم) على هـ ونطبق احد ضلعى القائمه على اب ثم نرسم هـ ء بجانب الضلع الآخر (ش ٩)

فيكون حـ ى هو العمود المطلوب

البرهان - ى حـ عمود لان د ى حـ ا تساوى زاوية المثلث القائمة بالتطبيق

٤١ الزوايا المتتامه - هى ماكان مجموعها يساوى قائمه

٤٢ الزوايا المتكامله - هى ماكان مجموعها يساوى قائمتين

نظريه ٣

٤٣ الزاويتان المتجاورتان الحادثتان من تقاطع مستقيمين تكونان متكاملتين

المفروض - المستقيمان ب ى و حـ هـ متقاطعان فى هـ (ش ١٠)

المطلوب اثباته - د م + د حـ هـ ى = ٢ ق

البرهان - نقيم هـ و عموداً على ب ى فينتج

د م + د ن = ١ ق (ش ٣٤)

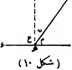
د ح " = ١ ق

نجمع

د م + د ن + د ح = ٢ ق

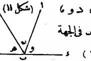
لكن د ن + د ح = د حـ هـ ى

اذن د م + د حـ هـ ى = ٢ ق وهو المطلوب



(شكل ١٠)

٤٤ فرع أول - الزوايا المتكونة حول نقطة من جهة واحدة من مستقيم تكون متكاملة



المفروض ـ المستقيم ء هـ ، د و ، د ن ، د هـ حول نقطة ب في الجهة العليا من ء هـ (ش ١١)

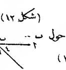
(شكل ١١)

المطلوب اثباته ـ د و + د ن + د هـ = ٢ ق

البرهان ـ د و + د ا ب هـ = ٢ ق (٤٣) نستعيض عن ا ب هـ بجزئيها

ينتج د و + د ن + د هـ = ٢ ق وهو المطلوب

٤٥ فرع ثان ـ الزوايا المتكونة حول نقطة واحدة في مستو واحد مجموعها اربع قوائم



(شكل ١٢)

المفروض ـ الزوايا المتكونة حول ب في جميع الجهات (ش ١٢)

المطلوب اثباته ـ د ب + د ٤ + د ٦ + د ء ب هـ = ٤ ق

البرهان ـ نمد ا ب على استقامته من جهة ب وليكن ا ب هـ تقدم في (٤٤)

ان الزوايا الموجوده فوق ا هـ تساوى ٢ ق والموجوده تحته = ٢ ق اذن مجموع الزوايا المفروضه يساوى اربع قوائم

تمـرينات

٨ اذا كانت احدى الزوايا الاربع الحادثة من تقاطع مستقيمين قائمه تكون كل من الثلاث الاخرى قائمه

٩ ست زوايا متساويه مرسومه حول نقطه ما مقدار كل زاوية منها

١٠ ارسم زاويه تتكامل مع زاويه معلومه

١١ زاويتان حدثتا من تقابل مستقيم بآخر واحداهما تزيد عن الاخرى بمقدار زاويه قائمه ما مقدار كل منهما

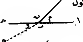
١٢ ارسم زاويه تتتام مع زاويه معلومه

تعريف

٤٦ النظريتان العكسيتان هما ماكان المفروض في احداهما مطلوبا في الثانيه وبالعكس

نظريه ٤ (عكس المتقدمه)

كل زاويتين متجاورتين متكاملتين يكون ضلعاهما على استقامة واحدة



(شكل ١٣)

المفروض - د م + د ن = ٢ ق

المطلوب اثباته - ا ب على استقامة ب ـه

البرهان - ان لم يكن ا ب على استقامة ب ـه كان على استقامة

اخرى مثل ب هـ أعني أن ا ب هـ خط مستقيم ومن حيث
أنه معلوم لنا فرضاً ان د م + د ه = ٢ ق
وبناء على (٤٤) د م + د ه ≠ د و = ٢ ق
فعلى حسب (٢) يكون د م + د ه ≠ د م + د ه + د و
وهذا خلف جاء من عدم التسليم بان ا ب على استقامة ب حـ
اذن ا ب على استقامة ب حـ وهو المطلوب

ملاحظة – بعض الدعاوى يكون عكسه صحيحاً كما شوهد
في نظريتى ٣ و ٤ وبعضها ليس كذلك
فمثلاً – الزوايا القائمة كلها متساوية كما تقدم وليست
كل الزوايا المتساوية قائمة

تمرينات

١٣ اذا كانت الزاوية المحصورة بين منصفى زاويتين متجاورتين غير قائمة فالضلعان المتطرفان لا يكونان على استقامة واحدة

اذكر عكس ما يأتي وبين ان كان صحيحاً أو خطأ

١٤ كل دجاجة لها رجلان

١٥ نقطة منصف مستقيم على بعدين متساويين من طرفيه

٤٦ الانسان ذو عقل

٤٧ الحيوان المفترس يأكل اللحوم

٤٨ بديهية - اذا زيد مقدار واحد على كلٍّ من شيئين وكان الناتج واحدا كان الشيآن متساويين

وعلى هذا فكل زاويتين تتكامل أو تتتام كل منهما مع زاوية واحدة تكونان متساويتين

تعريف

٤٩ الزاويتان المتقابلتان في الرأس هما ما كان ضلعا احداهما على امتداد ضلعي الاخرى

نظرية ٥

٥٠ الزاويتان المتقابلتان في الراس متساويتان

(شكل ١٤)



المفروض - زاويتان ب ، هـ متقابلتان في الرأس

المطلوب اثباته - د ب = د هـ

البرهان - من حيث ان كلا من الزاويتين ب ، هـ تتكامل مع د د فتكونان متساويتين (٤٨) وهو المطلوب

تمـــرين

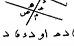
١٨ منصفا الزاويتين المتقابلتين في الرأس على استقامة واحدة

١٩ اذا امتدّ من نقطة أربعة مستقيمات وكانت كل زاوية تساوى غير المجاورة لها فاثبت أن كل زاويتين متساويتين متقابلتان في الرأس

تسميـة

٥١ اذا قطع مستقيم مستقيمين ايا كانا حدث من ذلك ثمانى زوايا لكل اثنتين منها اسم خاص بهما

(شكل ١٥)



(فى شكل ١٥) د ب و د ح او د ء و د هـ تسميان متبادلتين داخلتين

„ د و و د ص „ د ن و د م „ „ خارجتين

„ د ب و د هـ „ د ء و د ح „ متجانبتين داخلتين

„ د و و د م „ د ن و د ص „ „ خارجتين

„ د ح و د و „ د هـ و د ن او } تسميان متناظرتين
„ د ء و د م „ د ب و د ص }

تعريف

٥٢ الزاويتان المتبادلتان الداخلتان - ماكانتا بين المستقيمين وفي جهتين مختلفتين من القاطع وغير متجاورتين مثل د ب ، د ح

تنبيه يمكن تعريف باقي الزوايا مع السهولة قياساً على التعريف السابق

المستقيمات المتوازية

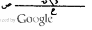
٥٣ تعريف - المستقيمات المتوازية هي مستقيمات في مستو واحد مهما امتدت في أي جهة لا تتلاقى

٥٤ بديهية - لا يمكن مد غير مستقيم واحد بين نقطتين

نظرية ٦

٥٥ اذا كان
(١) الزاويتان المتبادلتان الداخلتان متساويتين
(٢) " " الخارجتان "
(٣) " المتناظرتان متساويتين
(٤) " المتجانبتان الداخلتان متكاملتين
(٥) " " الخارجتان "
كان المستقيمان متوازيين

(١) اذا كان الزاويتان المتبادلتان الداخلتان متساويتين كان المستقيمان متوازيين

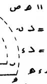


(شكل١٦)

المفروض - (ش ١٦) ـد ـه = ـد ـه (شكل ١٧)

المطلوب اثبات ب ه ‖ ه ص

البرهان من حيث أن ـد ـه = ـد ـه



فتكون (٤٨) ـد م = ـد ى

نتصور فصل الجزء ـه ـد ى ه

من الجزء ه م ـه ص كما في الشكل (١٧) ثم نديرالجزء ـه ـد ى ه

في اتجاه الأسهم الى أن يأخذ وضعا مثل هَ ىَ ـدَ ـتَ وبعد ذلك

نطبق هَ ىَ ـدَ ـتَ على ه م ـه ص بحيث تقع نقطة ىَ على م،

نقطة ـدَ على ـه وعا أن ـد ىَ = ـد م ينطبق المستقيم ىَ هَ

على م ه وبالمثل ينطبق ـدَ ـتَ على ـه ص

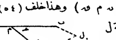
فلو فرض ان المستقيمين ب ه ، ه ص (ش ١٨) غيرمتوازيين

أى يتقابلان من جهة اليمين مثلا في نقطة مثل ل فلابد أن

يتقابلا من جهة اليسار في نقطة مثل ك (لأن ـه ـد ى ه

انطبق على ص ـه م ه) وهذا خلف (٥٤) جاء من فرض

انهما تقابلا في نقطة ل

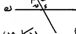


(شكل ١٨)

فاذن لايتقابلان ابداً بل يكونان متوازيين وهو المطلوب

ملاحظة - برهان الاحوال الاربع الباقية من هذه النظرية يرجع للحالة الاولى وهاك نموذجاً

اذا كان الزاويتان المتجانبتان الداخلتان متكاملتين كان المستقيمان متوازيين



المفروض (ش ١٩) د ن + د م = ٢ ق

المطلوب اثباته ع ح يوازى ل ك

(شكل ١٩)

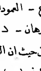
البرهان - د ن + د م = ٢ ق فرضاً

د هـ + د م = ٢ ق (٤٣)

فتكون د ن = د هـ (٤٨)

وعلى حسب الحالة الاولى يكون ع ح يوازى ل ك وهو المطلوب

٥٦ فرع - العمودان على مستقيم متوازيان



البرهان - د هـ + د ى = ٢ ق فرضاً

ومن حيث ان الزاويتين المتجانبتين متكاملتان

فيكون (٥٥) هـ هـ يوازى ب ى

وهو المطلوب

(شكل ٢٠)

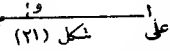
تعريف – القضية المسلمة هى دعوى عملية صحتها واضحة بدون اجراء العمل فمثلا لايمكن مد موازيين بالعمل لمستقيم واحد من نقطة خارجة عنه

نظرية ٧

٥٧ يمكن مد مواز لمستقيم من نقطة خارجة عنه ولايمكن مد خلافه

المفروض – مستقيم ا ب ونقطه ﻫ

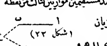
المطلوب اثباته { (١) يمكن مد مواز من ﻫ للمستقيم ا ب
(٢) لايمكن مد خلافه }


شكل (٢١)

البرهان – (١) نمد ﻫ و عموداعلى ا ب ثم نقيم ﻫ ﻫ عموداً على ﻫ و فبناء على (٥٦) يكون ﻫ ﻫ يوازى ا ب وهوالمطلوب

(٢) من القضايا المسلمة انه لايمكن مد مستقيمين موازيين لثالث من نقطة واحدة

٥٨ فرع – الموازيان لثالث متوازيان


(شكل ٢٢)

المفروض ا ب ‖ ﻫ و ، ﺣ ء ‖ ﻫ و

المطلوب اثباته ا ب ‖ ﺣ ء

البرهان – ان لم يكونا متوازيين تقابلا فى نقطة ع وهو خلف (٥٧)

٥٨ بديهية - الشيآن اللذان أحدهما ليس أكبر ولا اصغر من الثانى يكونان متساويين

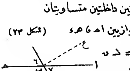
نظرية ٨ (عكس نظرية ٦)

٥٩ اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين

ينتج ان
(١) كل زاويتين متبادلتين داخلتين متساويتان
(٢) " " خارجتين "
(٣) " " متناظرتين متساويتان
(٤) " " متجانبتين داخلتين متكاملتان
(٥) " " " خارجتين "

(١) كل زاويتين متبادلتين داخلتين متساويتان

المفروض - ب د قاطع المتوازيين اه ، هء (شكل ٢٣)



المطلوب اثبات د ا ب د = د ب د

البرهان - ان لم تكن د ا ب د = د ب د كانت أصغر أو أكبر منها

فاذا كانت د ا ب د أصغر من د ب د ومد ب ع بحيث يصنع د ع ب د = د ب د بناء على (٥٥) يكون ب ع يوازى ه ء

وبالفرض ب ا يوازى هـ ء فيكون قد أمكن مد موازيين لثالث
من نقطة واحدة وهو مستحيل اذن د ا ب ہ ليست أصغر
من د ہ وكذلك يبرهن على انها ليست اكبر منها ومن حيث أن
د ا ب ہ ليست اكبر ولا أصغر من د ہ فتكون مساويها (٥٨) وهو المطلوب

(٢) البرهان ـ يمكن استنتاجه مما ثبت فى (١) من هذه النظرية

(٣) كل زاويتين متناظرتين متساويتان

المطلوب اثباته ـ د ہ = د ٦

البرهان ـ قد ثبت أن د ہ = د ا ب ہ

ومن حيث ان د ٦ = د ا ب ہ بالتقابل فى الرأس

فبناء على (٢) تكون د ہ = د ٦ وهو المطلوب

(٤) كل زاويتين متجانبتين داخلتين متكاملتان

المطلوب اثباته د ب + د ہ = ٢ ق

البرهان ـ د ب + د ا ب ہ = ٢ ق

لكن ـ د ا ب ہ = د ہ (١) من هذه النظرية

فيكون ـ د ب + د ہ = ٢ ق وهو المطلوب

(٥) البرهان ـ يمكن استنتاجه مما ثبت فى (١) من هذه النظرية

نظريه ٩

٦٠ المستقيم العمود على احد مستقيمين متوازيين يكون عموداً على الثانى

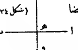
المفروض - ا ب ॥ ﺣ ء ، ﻫ و ⊥ ﺣ ء

المطلوب اثباته - ﻫ و ⊥ ا ب أيضا

البرهان - د و = د ﻫ بالتناظر

ومن حيث ان د و قائمة فرضا فتكون

د ﻫ قائمه اى ﻫ و عموداً على ا ب وهو المطلوب


(شكل ٢٤)

تمــــرينات

٢٠ مفروض جملة مستقيمات متوازيه فاذا أقمنا عمودا على احدها فما اتجاهه بالنسبة للاخرين

٢١ مستقيمان متوازيان قُطعا بثالث وكانت احدى الزوايا الداخلة ٣٠° ما مقدار كل زاوية من الشكل

٢٢ اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين ونصفت زاويتان متبادلتان داخلتان أو زاويتان متناظرتان يكون كل منصفين متوازيين

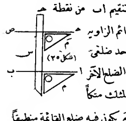
٢٣ مستقيمان ا ب ، ﺣ ء قطعهما ثالث فى نقطتى ﻫ ، س فاذا كانت د ا ﻫ س = ١٢٣° ، د ﺣ س ﻫ = ٦٢° فهل ا ب ॥ ﺣ ء

٢٤ قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فكان مقدار احدى الزوايا الخارجية ١٠٥° ما مجموع كل زاويتين متبادلتين داخلتين

عملية ٢

٦١ المعلوم مستقيم ونقطة خارجة عنه والمطلوب رسم موازله من هذه النقطة

المفروض مستقيم مثل ا ب ونقطة مثل هـ خارجة عنه والمطلوب رسم مواز للمستقيم ا ب من نقطة هـ



العمل - ضع المثلث القائم الزاوية في الوضع م بحيث ينطبق أحد ضلعى القائمة على ا ب ويجانب الضلع الآخر ضع مسطرة مثل س ثم حرك المثلث متكأ على المسطرة حتى يأخذ وضع مَ يكون فيه ضلع القائمة منطبقاً على هـ ثم ارسم هـ ص فيكون هو الموازى المطلوب

البرهان - الزاويتان المتناظرتان متساويتان لان كلا منهما تساوى زاوية المثلث

نظرية ١٠

٦٢ الزاويتان اللتان كل ضلعين متناظرين منهما متوازيان تكونان اما متساويتين أو متكاملتين

للتساوى حالتان والتكامل حالة واحدة

حالة التساوى الاولى - الزاويتان اللتان كل ضلعين منهما متوازيان ومتحدان في الاتجاه تكونان متساويتين

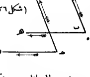
ملاحظة - لمعرفة اتجاه ضلع زاوية يفرض شخص يتحرك عليه مبتدأ من رأسها فالجهة التى يتحرك تبعالها تكون اتجاه الضلع ويبين اتجاه الاضلاع باسهم كما فى الشكل

المفروض - د ب ، د حـ فيهما

اب ‖ د حـ ، ب هـ ‖ حـ و

وكل ضلعين متوازيين متحدان فى الاتجاه

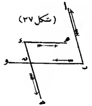
المطلوب اثبات د ب = د حـ



(شكل ٢٦)

البرهان - كل من زاويتى ب ، حـ = د ه بالتناظر وحينئذ تكون د ب = د حـ وهو المطلوب

حالة التساوى الثانيه - الزاويتان اللتان كل ضلعين منهما متوازيان ومختلفان فى الاتجاه تكونان متساويتين



(شكل ٢٧)

المفروض - ا ب ‖ حـ ء ، ب و ‖ ء هـ

وكل متوازيين مختلفا الاتجاه

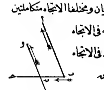
المطلوب اثباته - د ب = د ء

البرهان د ب = د ن بالتناظر

د ء = د ن بالتبادل

فتكون د ب = د ء (٢) وهو المطلوب

حالة التكامل - الزاويتان اللتان ضلعان منهما متوازيان ومتحدا الاتجاه والضلعان الاخران متوازيان ومختلفا الاتجاه متكاملتين



المفروض - ا ب ‖ و هـ ومتحد معه فى الاتجاه

ب حـ ‖ هـ ء ومخالف له فى الاتجاه

المطلوب اثباته د ب + د هـ = ٢ ق

البرهان - د هـ + د ن = ٢ ق (٥٩)

لكن د ب = د ن بالتبادل

(شكل ٢٨)

فيكون د ب + د هـ = ٢ ق وهو المطلوب

نظريه ١١

٦٣ الزاويتان اللتان كل ضلعين منهما متعامدان تكونان متساويتين او متكاملتين

اولا تكونان متساويتين اذا كانتا حادتين أو منفرجتين

ثانيا تكونان متكاملتين اذا كانت احداهما منفرجة والثانية حادة

(١) المفروض - د و ، د ه حادتان فيهما

اب ⊥ ب ح ، هب ⊥ ءب



شكل ٢٩

المطلوب اثباته د و = د ه

البرهان - د و = د ه لان د م تتام مع كل منهما

اثبت الحالة السابقة بفرض ان الزاويتين لم تشتركا فى الرأس

(٢) المفروض - د ب ، د ه منفرجتان فيهما اب ⊥ ءه ، ب ح ⊥ ده

المطلوب اثباته - د ب = د ه

البرهان نمد وه على استقامته وكذلك ه ب



(شكل ٣٠

فينتج د ٤ = د ٣ (١) من هذه النظرية

وتكون د ب = د ه (٤٨)

حالة التكامل

المفروض - د ب منفرجه ، د ٣ حاده (ش ٣٠) فيهما كل

ضلعين متناظرين متعامدان

المطلوب اثباته − د ب + د ٣ = ٢ ق

البرهان − د ب + د ٤ = ٢ ق

د ٤ = د ٣ (١) من هذه النظرية

فينتج د ب + د ٣ = ٢ ق وهو المطلوب

المثلثات

(تعاريف)

٦٤ المثلث جزء من مستو محاط بثلاثة مستقيمات متقاطعة مثنى مثنى تسمى اضلاع المثلث والزوايا الناتجة من تقاطعها تسمى زوايا المثلث ورؤوسها تسمى رؤوسه

٦٥ المثلث المتساوي الساقين هو ما تساوى فيه ضلعان الضلعان المتساويان يسميان ساقي المثلث وضلعه الثالث قاعدته والرأس المقابل لها رأسه

٦٦ المثلث المتساوي الأضلاع هو ما كانت أضلاعه متساوية والمتساوي الزوايا هو ما كانت زواياه متساوية

وستعلم ان كل مثلث متساوي الأضلاع يكون متساوي الزوايا وبالعكس

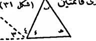
٦٧ المثلث القائم الزاوية هو ما كانت احدى زواياه قائمة
الضلع المقابل للقائمة يسمى وترالها

٦٨ الزاوية الخارجة عن مثلث هي المتكونة من ضلع منه ومن
امتداد آخر مثل ∠ ب ء هـ (ش ٣١)

نظرية ١٢

٦٩ مجموع زوايا أى مثلث يساوى قائمتين

(شكل ٣١)



المفروض - المثلث ب حـ ء

المطلوب اثباته ∠ ء + ∠ ب + ∠ حـ = ٢ ق

البرهان - نمد حـ ء على استقامته وليكن ء هـ ثم نمد ء و يوازى
حـ ب فيحدث ∠ ء + ∠ ٤ + ∠ ٣ = ٢ ق (٤٤)

وبما أن ∠ ٤ = ∠ ب بالتبادل ‏6 ∠ ٣ = ∠ حـ بالتناظر

فيكون ∠ ء + ∠ ب + ∠ حـ = ٢ ق وهو المطلوب

٧٠ فرع (١) الزاوية الخارجة عن مثلث تساوى مجموع الزاويتين غير
المجاورتين لها من المثلث

٧١ فرع (٢) لايكون للمثلث الا زاوية واحدة قائمة أو واحدة منفرجة

٧٢ فرع (٣) فى المثلث القائم الزاوية الحادتان متتامتان

٧٣ فرع (٤) اذا ساوى زاويتان من مثلث زاويتين من آخر كان الثالثتان متساويتين

٧٤ فرع (٥) الزاوية الخارجة من مثلث اكبر من كل من الزاويتين غير المجاورتين لها

تمرينات

٢٥ اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين ونصفت زاويتان متجانبتان يكون المنصفان متعامدين

٢٦ اثبت ان مجموع زوايا المثلث تساوى قائمتين وذلك باقامة عمودين على احد اضلاعه من نهايتيه وانزال عمود عليه من الرأس المقابل له

٢٧ اثبت ان مجموع زوايا اى مثلث تساوى قائمتين بمد مواز من احدى رؤوسه للضلع المقابل

٢٨ كم زاوية منفرجة على الاقل تكون خارجة عن المثلث

٢٩ في المثلث ا ب هـ زاوية ا = د ب فاذا مد ب هـ من جهة هـ تكون الزاوية الخارجة ضعف د ب

٣٠ اذا كان مقدار الزاويتين الخارجتين الحادثتين من امتداد ضلع من جهتيه ١٠٠° و ١٢٠° فما مقدار كل زاوية من المثلث

٣١ اذا انزل عمود من رأس الزاوية القائمة من مثلث قائم الزاوية على

الوتر يحدث ثلاثة مثلثات زواياه اى واحد منها تساوى زوايا كل من الآخرين

٣٢ اذا نزل عمود من رأس مثلث على الضلع المقابل له فوقع فى الخارج يكون المثلث منفرج الزاويه

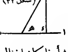
اذا مدت من رؤوس مثلث مستقيمات بحيث تصنع مع اضلاعه على الترتيب زوايا متساوية تكون زوايا المثلث الحادث من تقابل هذه المستقيمات بعضها مع بعض مساوية لزوايا المثلث الأول

نظريه ١٣

٧٥ من نقطة خارج مستقيم لايمكن انزال عمودين عليه

المفروض - مستقيم ا ب ونقطة ﻫ خارجة عنه

المطلوب اثباته - لايمكن انزال عمودين من ﻫ على ا ب

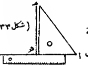


(شكل ٣٢)

البرهان - لو امكن انزال عمودين مثل ﻫ ء ، ﻫ ﻫ لكانت د ء قائمة ، د ﻫ قائمة ووجود قائمتين فى مثلث خُلف وَالخلف نشأ من امكان انزال عمودين اذن لايمكن انزال عمودين وهو المطلوب

عمليه ٣

٧٦ المعلوم مستقيم ونقطة خارجة عنه والمطلوب ازال عمود منها على هذا المستقيم



(شكل ٣٣)

المفروض مستقيم مثل اب ونقطة خارجة عنه مثل حـ والمطلوب ازال عمود من حـ على اب

العمل - نطبق حافة مسطرة على اب ثم نثبت عليها احد ضلعي القائمة من مثلث الرسم ونحرك المثلث حتى يمر الضلع الآخر من القائمة بنقطة حـ ثم نرسم حـ هـ فيكون هو العمود المطلوب كما في الشكل المتقدم

البرهان - حـ هـ عمود على اب لانه صنع معه زاوية تساوى زاوية المثلث القائمة

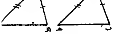
تساوى المثلثات

نظريه ١٤

٧٧ يتساوى المثلثان اذا تساوى فيهما ضلعان والزاوية المحصورة بينهما النظير لنظيره

المفروض ـ مثلثان ا ب ح ، ء ه و فيهما

(شكل ٣٤)



ا ب = ء ه

ا ح = ء و

ح ا = ح ء

المطلوب اثباته △ ا ب ح = △ ء ه و

البرهان ـ نطبق △ ا ب ح على △ ء ه و بان نطبق الضلع ا ب على مساويه ء ه بحيث تقع النقطه ا على ء ، ب على ه ومن حيث أن ح ا = ح ء فرضا فيقع ا ح على ء و ومن حيث أن ا ح = ء و فتقع نقطة ح على و ويكون الضلع ب ح انطبق على الضلع ه و لان نهايتي الاول وقعتا على نهايتي الثاني

فنرى ان المثلثين انطبقا تماماً وكونا شكلا واحداً وحينئذ يكون △ ا ب ح = △ ء ه و وهو المطلوب

٧٨ (تنبيه مهم) في المثلثات المتساوية الأضلاع المتساوية تقابلها الزوايا المتساوية وبالعكس الزوايا المتساوية تقابلها الاضلاع المتساوية

تمرينات

٣٤ اذا اقيم عمود على مستقيم من منتصفه فكل نقطة من العمود تكون على بعدين متساويين من نهايتي المستقيم

٣٥ المستقيمان ا ب ٯ ح د ينصف كل منهما الآخر في نقطة هـ اثبت ان ا حـ يوازى ب د

٣٦ منصف زاوية الرأس من مثلث متساوى الساقين يقسمه الى مثلثين متساويين

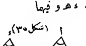
٣٧ ا ٯ ب نقطتان في جهة واحدة من مستقيم د هـ فاذا كان ا هـ = ب د ٯ ∠ ا هـ د = ∠ ب د هـ تكون نقطة منتصف هـ د على بعدين متساويين من ا ٯ ب

نظريه ١٥

٧٩ يتساوى المثلثان اذا تساوى فيهما ضلع وزاويتان النظيرلنظ

المفروض - △ ا ب حـ ، △ ء هـ و فيهما

(شكل ٣٠)



ب حـ = هـ و

ـدا = ـدء

ـدب = ـدهـ

والمطلوب اثباته - △ ا ب حـ = △ ء هـ و

البرهان - ـدحـ = ـدو (٢٣)

نطبق △ ا ب حـ على △ ء هـ و بان نطبق ب حـ

مساويه هـ و بحيث تقع نقطة ب على هـ ، حـ على

ومن حيث أن ـدب = ـدهـ فرضا فيقع الضلع ب ا

" ـدحـ = ـدو فرضا فيقع الضلع حـ ا على و

" الضلع ب ا وقع على هـ ء ، حـ ا وقع على و ء

ان نقطة تقابل ضلعى المثلث الاول وهى ا تقع فى نقطة

ضلعى الثانى وهى ء وبذلك ينطبق المثلث الاول على الثانى كال

ويكونان متساويين أى △ ا ب حـ = △ ء هـ و وهو

تمرينان

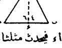
اح ٬ ب د عمودان متساويان اقيما على اب فى جهتين مختلفتين منه اثبت ان اب ٬ ح د ينصف كل منهما الآخر

اذا كان منصف احدى زوايا مثلث عمودا على الضلع المقابل لها يكون المثلث متساوى الساقين

نظرية ١٦

فى كل مثلث متساوى الساقين الزاويتان المقابلتان للساقين متساويتان

(شكل ٣٦)



المفروض - △ اب ح فيه اب = اح

المطلوب اثباته - ∠ ب = ∠ ح

البرهان ننصف ∠ ب اح بالمستقيم اد فيحدث مثلثان

اب د ٬ اد ح فيهما اب = اح فرضاً اد مشترك

∠ ب اد = ∠ د اح بالعمل

فيكون △ اب د = △ اد ح (٧٧)

ومن تساويهما تكون ∠ ب = ∠ ح وهو المطلوب

فرع اول - فى كل مثلث متساوى الساقين منصف زاوية الرأس يكون عمودا على القاعدة ومنصفا لها

البرهان — ∆ اب ء = ∆ اء هـ (ش ٣٦)

فينتج اولا ∠ ٤ = ∠ ٦ أى أن اء عمود على ب

ثانيا ب ء = ء هـ وهو المطلوب

فرع ثان - المثلث المتساوى الاضلاع متساوى الزوايا

(تنبيه) المستقيم اء فيه اربع خواص (١) مار بالرأس (٢) منصف لزاوية الرأس (٣) منصف القاعدة (٤) عمود عليها فاذا وجدت خاصيتان من هذه الأربع لابد من وجود الاثنين الاخريين

تمرينات

منصف قاعدة مثلث متساوى الساقين على بعدين متساويين من منتصفى ساقيه

٤١ اب هـ مثلث متساوى الساقين اخذ نقطتان ء، هـ على قاعدته بحيث أن ب ء = هـ هـ اثبت أن اء هـ مثلث متساوى الساقين ايضا

٤٢ اب هـ مثلث متساوى الاضلاع اخذت على أضلاعه ثلاثة ابعاد متساوية مثل او، ب ء، هـ هـ اثبت أن ء هـ و مثلث متساوى الاضلاع

نظرية ١٧ (عكس المتقدمة)

٨١ اذا تساوت زاويتان من مثلث يكون المثلث متساوي الساقين

المفروض - مثلث ا ب ﻫ فيه ﺩ ب = ﺩ ﻫ

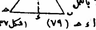
المطلوب اثباته - ا ب = ا ﻫ

البرهان - ننصف ﺩ ب ا ﻫ بالمستقيم ا ء

فينتج ∆ ب ا ء ، ∆ ء ا ﻫ فيهما ا ء مشترك

ﺩ ب = ﺩ ﻫ وضا

ﺩ ٤ = ﺩ ٥ بالعمل



فيكون ∆ ا ب ء = ∆ ا ء ﻫ (٧٩) (شكل ٣٧)

ومن تساويهما ينتج ا ب = ا ﻫ وهو المطلوب

فرع - المثلث المتساوي الزوايا يكون متساوي الأضلاع

تمرين

٤٣ المثلث ا ب ﻫ نصفت زاويتاه ب ، ﻫ فتقابل المنصفان في نقطة ء فاذا كان ب ء = ء ﻫ يكون المثلث ا ب ﻫ متساوي الساقين

نظريه ١٨

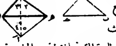
٨٢ يتساوى المثلثان اذا تساوت فيهما الاضلاع الثلاثة النظير لنظيره

المفروض - مثلثان ا ب حـ ، ء هـ و فيهما

ا ب = ء هـ ا حـ = ء و . ب حـ = هـ و

المطلوب اثباته - Δ ا ب حـ = Δ ء هـ و

البرهان - نطبق الضلع ب حـ (شكل ٣٨)



على مساويه هـ و بحيث تقع

ب على هـ ، حـ على و وبحيث

تقع نقطة ا في جهة مضاده للجهة التي فيها نقطة ء بالنسبة

للمستقيم هـ و فيأخذ المثلث ا ب حـ الوضع اَ هـ و ثم نمد

المستقيم ء اَ فيحدث مثلثان هـ اَ ء ، و اَ ء كل منهما متساوى

الساقين فيكون ∠ ٥ = ∠ ٢

∠ ٤ = ∠ ٣

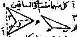
بجمع المتساويتين ∠ ٥ + ∠ ٤ = ∠ ٢ + ∠ ٣

اى ∠ هـ اَ و = ∠ هـ ء و

فيكون Δ اَ هـ و = Δ ء هـ و (٧٧)

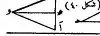
او Δ ا ب حـ = Δ ء هـ و وهو المطلوب

ملاحظة ـ اذا كان المثلثان فى وضع كما فى (ش ٣٩) نطبق كما تقدم فى ش ٣٨ ونصل ءآ الذى يقع خارج المثلثين فيحدث ∆ هـ ء آ ، ∆ و ء آ كل منهما متساوى الساقين
ويكون ∠ هـ آ ء = ∠ هـ ء آ ، ∠ ٢ = ∠ ٣



(شكل ٣٩)

نطرح المتساوية الثانية من الاولى فينتج ∠ و آ هـ = ∠ و ء هـ
اذن ∆ آ هـ و = ∆ ء هـ و (٧٧) أو مثلث ا ب حـ = ∆ ء هـ و (شكل ٣٩)
يجوز بعد التطبيق ان يقع الضلع ا ب على امتداد ء هـ (ش ٤٠) ء
المثلث و ء آ متساوى الساقين
ويكون ∠ آ = ∠ ء = ∠ ا
فالمثلثان متساويان



(شكل ٤٠)

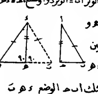
تمرين

٤٤ مثلثان كلاهما متساوى الساقين قاعدتهما مشتركة
اثبت ان المستقيم الواصل بين رأسيهما عمود على القاعدة وينصفها

نظرية ١٩

٨٣ يتساوى المثلثان القائما الزاوية اذا تساوى فيهما وتر وضلع النظير لنظيره

المفروض ـ مثلثان قائما الزاوية فيهما الوتر ا ب = الوتر ء و والضلع ا حـ = ء هـ



المطلوب اثباته ∆ ا ب حـ = ∆ ء هـ و

البرهان ـ نحرك المثلث ا ب حـ من اليمين الى اليسار حتى ينطبق ا حـ على مساويه ء هـ بحيث تقع ا على ء ، حـ على هـ ويأخذ المثلث ا ب حـ الوضع ء هـ بَ ومن حيث ان زاويتى هـ قائمتان فيكون بَ هـ على استقامة هـ و (٤٧) ويكون المثلث ء و بَ متساوى الساقين لان ا ب = ء بَ = ء و

فتكون ∙ د بَ = د و = د ب

اذن ∆ ا ب ﺟ = ∆ ء ﻫ و (٧٩) وهوالمطلوب

تعريفان

٨٤ الشكل الرباعي - هوجزء من مستو محاط باربعة مستقيمات تسمى أضلاعه

٨٥ منصف المثلث - هوالمستقيم الواصل من رأس المثلث الى منتصف الضلع المقابل لها

تمرينات متنوعة

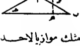
٤٥ اذا مد مستقيم مواز لقاعدة مثلث متساوى الساقين بحيث يتقابل مع ساقيه او امتدادها نتج مثلث آخر متساوى الساقين

٤٦ العمودان النازلان من منتصف قاعدة مثلث متساوى الساقين على ساقيه يكونان متساويين

٤٧ اذا مد احد ساقى مثلث متساوى الساقين من جهة الرأس ونصفت الزاوية الخارجة يكون المنصف موازيا للقاعدة

٤٨ اذا مد من احدى نقط المنصف لزاوية موازيان لضلعيها كانا متساويين

٤٩ مثلث ا ب حـ متساوى الساقين فيه د ا اربعة أمثال د حـ اثبت ان كل عمود على قاعدته مثل د هو يكوّن مثلثا د او متساوى الاضلاع



٥٠ اذا كان منصف الزاوية الخارجة عن مثلث موازيا لاحد الاضلاع يكون المثلث متساوى الساقين

٥١ اذا نصفت زاويتا القاعدة من مثلث متساوى الساقين فالمستقيم الواصل من الراس الى نقطة تقابل المنصفين يكون منصفا لزاوية الرأس

٥٢ يتساوى المثلثان اذا تساوى فيهما ضلعان ومنصف المثلث المقابل لاحدهما النظير لنظيره

٥٣ اذا كانت زاوية من مثلث تساوى مجموع الاخريين يكون المثلث قائم الزاوية

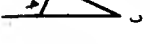
٥٤ اذا كانت زاوية من مثلث تساوى مجموع الاخريين امكن تقسيم المثلث الى مثلثين متساويى الساقين

٥٥ اذا مدضلع مثلث من نهايتيه فمجموع الزاويتين الخارجتين يزيد عن قائمتين

بقدرالزاوية المقابلة لذلك الضلع

٥٠ اذانصفت الزوايا الخارجة عن مثلث حدث مثلث آخر كل زاوية منه تساوي نصف المكملة للزاوية المقابلة لها في المثلث الاول

٥ الزاوية الحادثة من منصفي زاوية ا وزاوية ﻫ الخارجة تساوي نصف زاوية ب



٥ ا ب ﻫ مثلث متساوي الاضلاع نصفت زاويتا قاعدته فتقابل المنصفان في ٤ ثم رسم من ٤ موازيا للساقين اب ٦ اﻫ اثبت أن الموازيين يقسمان ب ﻫ الى ثلاثة أقسام متساوية

٥ المستقيمات الموازية لاضلاع مثلث مارة برؤوسه تكون مثلث آخر يساوي أربعة أمثال الاول وأضلاعه ضعف أضلاع الاول وزواياهما متساوية

المثلث اب ﻫ نصفت زاويتاه ب ٦ ﻫ فتلاقى المنصفان في م ثم مد من م موازللضلع ب ﻫ فقابل اب في ﻫ ٦ اﻫ في و اثبت أن ﻫ و = ﻫب + وﻫ

اب ﻫ ٦ ٤ ب ﻫ مثلثان كل منهما متساوي الاضلاع وفي جهتين

مختلفين من الضلع المشترك ب حـ نصفت زاوية ا ب حـ فقابل

المنصف الضلع ا حـ فى هـ وأيضا نصفت زاوية حـ ب ء

فقابل منصفها الضلع ء حـ فى و اثبت ان ∆ ب و هـ

متساوى الاضلاع

٦٢ ا ب حـ مثلث كيف كان رسم على كل من ضلعيه ا ب ٦ ا حـ

مثلث متساوى الاضلاع وهما ء ب ا ٦ هـ ا حـ اثبت أ

حـ ء = ب هـ .

٦٣ مثلث ا ب حـ مد ضلعاه ا ب ٦ ا حـ ثم نصفت الزاويتان الخارجة

فتقابل المنصفان فى ء اثبت ان ا ء ينصف زاوية ب ا حـ

٦٤ التمرين الآتى هام - اذا كانت احدى الحادتين فى المثلث القائم

الزاوية ضعف الاخرى يكون الوتر ضعف الضلع للقابل للزاوية الص

٦٥ اذا كان منصف المثلث نصف الضلع الواصل اليه يكون المثلث قائم الز

٦٦ اذا مد من كل من راسى مثلث مستقيم الى الضلع المقابل لها فنقط

تقاطع هذين المستقيمين لا تكون فى منتصف الاثنين

٦٧ مثلث ا ب حـ متساوى الساقين اخذ البعد ب ء = حـ هـ اثبت أ

القاعدة تنصف هـ ء



٦٨ ما عدد المثلثات المتساوية الاضلاع التي يمكن ان تشترك في رأس واحد

٦٩ مثلث متساوي الاضلاع رسم على ارتفاعه مثلث آخر متساوي الاضلاع اثبت ان اضلاع المثلثين متعامدة

٧٠ المثلث ا ب د نصفت د ا منه ونصفت ايضا الزاوية الخارجية ا د ى اثبت ان المنصفين غير متوازيين

٧١ مجموع زوايا أي شكل رباعي يساوي اربع قوائم

٧٢ الثلاث الزوايا الخارجية عن مثلث المجاورة كل منها لزاوية من زواياه تساوي اربع قوائم

٧٣ المثلثات ا ب ح ، ا ى ح ، ح ى هـ متساوية الأضلاع والمطلوب اثبات ان النقط ب ا ح هـ على استقامة واحدة

٧٤ المثلث ا ب هـ متساوي الساقين وقايم الزاوية في ا فاذا مدت قاعدته من جهة ب الى ى بحيث يكون ى ب = ا ب ومن جهة هـ الى هـ بحيث يكون هـ هـ = ا هـ اثبت أن ى ا هـ ستة أمثال كل من زاويتي ى ، هـ

٧٥ لماذا اذا امسكت بيديك خيطين أو شعرتين وشددتهما جيداً رأيت انهما منطبقان على بعضهما تمام الانطباق حتى يخيل لك انهما واحد الا انا

نظرية ٢٠

٨٦ فى كل مثلث الضلع الاكبر تقابله الزاوية الكبرى

(شكل ٤٢)



المفروض - △ ا ب هـ فيه ا ب > ا هـ

المطلوب اثباته - ∠ ب هـ ا > ∠ ب

البرهان - نأخذ على ا ب البعد ا ء

= ا هـ ثم نوصل ء هـ فينتج مثلث ا ء هـ متساوى الساقين

فيه ∠ ہ = ∠ م

ومن حيث أن ∠ ا هـ ب > ∠ ہ فتكون ∠ ا هـ ب > ∠ م

أيضا ولكن ∠ م > ∠ ب لانها خارجة عن △ ء هـ ب

فتكون ∠ ہ > ∠ ب

وعليه ∠ ا هـ ب > ∠ ب وهو المطلوب

نظريه ٢١ عكس المتقدمة

٨٧ فى كل مثلث الزاوية الكبرى يقابلها الضلع الاكبر

المفروض - ∆ ا ب ﺤ فيه د ﺤ > د ب

المطلوب اثباته ا ب > ا ﺤ

البرهان - ان لم يكن ا ب > ا ﺤ لكان مساوياً له أو اصغر منه

فان كان ا ب = ا ﺤ تكون د ب = د ﺤ (٨٠) وهو خلف

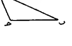
وان كان ا ب د ا ﺤ تكون د ﺤ < د ب (٧٦) وهو خلف أيضاً

ومن حيث ان ا ب لا يساوى ا ﺤ

ولا اصغر منه (٣) فلا بد أن يكون

ا ب > ا ﺤ وهو المطلوب

(شكل ٤٣)



تمرينات

٧٦ المثلث ا ب ﺤ فيه د ا = ٣٠° ، د ب = ٦٧° ماهو اصغر ضلع

وماهو اكبر ضلع فيه

٧٧ المثلث ا ب ﺤ نصفت كل من د ب ، د ﺤ فتقابل المنصفان

فى ء فاذا كان ب ء > ء ﺤ كان ا ب > ا ﺤ

٧٨ اذا وصل من رأس مثلث متساوى الساقين الى نقطة من قاعدته

أوس امتدادها كان المستقيم الواصل أصغر وأكبر من احدالساقين

٧٩ ا ب حـ ء شكل رباعي فيه ا ب اكبر أضلاعه ، حـ ء أصغرها
اثبت أن ∠ ب > ∠ ء

٨٠ ا ب حـ مثلث متساوي الساقين مدّمن ء احدى نقط الساق ا حـ مستقيم قابل الساق ا ب في هـ وامتداد القاعدة في و
اثبت أن ا هـ > ا ء

٨١ △ ا ب حـ فيه ا ب > ا حـ فاذا مسنا على امتدادهما من جهة ب ، حـ ونصف الزاويتان الخارجتان بالمستقيمين ب ء ، حـ ء
اثبت ان حـ ء > ب ء

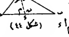
ملاحظة — هذه العلامة (×) تدل على ان الضلع الذي توضع عليه مشترك بين مثلثين

نظرية ٢٢

٨٨ مجموع أى ضلعين من مثلث اكبر من الثالث وفاضلهما أصغر منه

المفروض - △ ا ب حـ

المطلوب اثباته { (١) ب ا + ا حـ > ب حـ
(٢) ب ا - ا حـ < ب حـ }



(شكل ٤٤)

البرهان (١) ننصف ∠ ب ا حـ بالمستقيم ا ء

فتكون ∠ ب > ∠ هـ (٧٤)

اذن . ∠ ب > ∠ و ولان ∠ هـ = ∠ و بالتنصيف

وعليه (٨٧) ا ب > ب ء

وبالمثل ا حـ > ء حـ

نجمع ا ب + ا حـ > ب ء + ء حـ

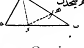
او ا ب + ا حـ > ب حـ وهو المطلوب

وهذا يؤيد تعريف المستقيم

(شكل ٤٥)

(٢) ننصف ∠ ب ا حـ بالمستقيم ا ء

ثم نأخذ ا هـ = ا حـ ونوصل ء هـ فيحدث



△ ا هـ ء = △ ا ء حـ (٧٧)

وعليه هـ ء = ء حـ

وفى Δ هـ ب ء الضلع هـ ب > ب ء + هـ ء

أو هـ ب > ب ء + ء حـ

،، هـ ب > ب حـ

فيكون ا ب - ا حـ > ب حـ وهو المطلوب

تمرينات

٨٢ ثلاثة مستقيمات أطوالها ٦ متر ، ٢ متر ، ٤ متر هل يمكن ان تكون أضلاع مثلث

٨٣ فى كل شكل رباعى أى ضلع أصغر من مجموع الثلاثة الاخر

٨٤ أربعة مستقيمات أطوالها ١٠ سنتيمتر ، ٤ سنتيمتر ، ٦ سنتيمتر ، ٧ سنتيمتر انتخب كل ثلاثة منها تصلح اضلاعاً لمثلث

٨٥ مجموع قطرى أى شكل رباعى اكبر من مجموع أى ضلعين متقابلين منه

٨٦ محيط المثلث اكبر من ضعف أى ضلع منه

نظرية ٢٣

٨٩ اذا اخذت نقطة داخل مثلث فمجموع بعديها عن نهايتي أحد أضلاعه أصغر من مجموع الضلعين الآخرين وزاوية البعدين اكبر من زاوية الضلعين

المفروض - △ ا ب ح ونقطة د داخله



المطلوب اثباته { (١) ب د + د ح < ب ا + ا ح
(٢) ∠ د > ∠ ا

البرهان - (١) نمد ب د حتى يقابل ا ح فى ه (شكل ٤٦)

فى △ ا ب ه : ب د + د ه < ب ا + ا ه (٨٨)

وفى △ د ه ح : د ح < ه ح + ه د (٨٨)

بجمع ب د + د ه + د ح < ب ا + ا ه + ه ح + ه د

أو ب د + د ح < ب ا + ا ح وهو المطلوب

(٢) ∠ ه > ∠ ا لانها خارجة عن △ ا ب ه

∠ د > ∠ ه " " " △ د ه ح

فتكون (٨) ∠ د > ∠ ا وهو المطلوب

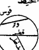
تمرين

٨٧ اذا اخذت نقطة داخل مثلث ووصل منها الى رؤوسه يكون مجموع

المستقيمات الواصلة أصغر من مجموع أضلاعه

تعريفات

٩٠ الدائرة هى جزء مستو محاط بخط منحن جميع نقطه على أبعاد متساوية من نقطة داخلة تسمى مركزا والخط المنحنى السالف الذكر يسمى محيط الدائرة

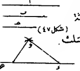


٩١ قطر الدائرة – هو كل مستقيم يمر بمركزها وينتهى فى المحيط

٩٢ القوس – هو جزء من محيط الدائرة

٩٣ وتر القوس – هو المستقيم الواصل بين نهايتيه

عملية ٤



(شكل ٤٧)

ارسم مثلثا بمعلومية أضلاعه الثلاثة

المفروض – ا ، ب ، حـ اضلاع مثلث.

المطلوب رسم المثلث

العمل – نرسم مستقيما أياكان ونأخذ عليه البعد ءهـ = ا

ثم نركز فى ء وبنصف قطر يساوى ب نرسم قوساً

ثم نركز فى هـ وبنصف قطر يساوى حـ نرسم قوسا يقطع القوس الاول فى و فيكون △ و ء هـ هو المطلوب البرهان (٨٢)

تمرينات

٨٨ ارسم مثلثاً أضلاعها

(١)	٣ سم	٤ سنتيمتر	٥ سنتيمتر
(٢)	٢	٤	٦
(٣)	٥	٣	٦
(٤)	٧	١	٤

عند عدم امكان رسم احد المثلثات اذكر السبب

٨٩ ارسم مثلثاً متساوى الاضلاع على مستقيم معلوم

ارسم مثلثاً متساوى الساقين بحيث يكون طول كل من ساقيه ضعف قاعدته

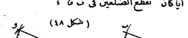
عملية ٥

٩٥ ارسم زاوية تساوى زاوية معلومة

المفروض - د ا والمطلوب رسم زاوية تساويها

العمل - نرسم مستقيماً ونأخذ نقطة من نقطة مثل ه ثم نركز فى ا وبعد أياكان نقطع الضلعين فى ب ، ء

(شكل ٤٨)



ثم ركز فى هـ وبالبعد عينه ارسم قوسا يقطع المستقيم فى هـ ثم
نأخذ البعد ء ب وركز فى هـ ونقطع القوس هـ و فى و
فتكون د و هـ هـ هى المطلوب

البرهان — Δ ب ا ء = Δ و هـ هـ (٨٢)

تمرينات

٩١ المعلوم زاويتان من مثلث والمطلوب ايجاد الثالثه

٩٢ ارسم مثلثا بمعلومية ضلع والزاويتين المجاورتين له

٩٣ ارسم مثلثا متساوى الساقين بمعلومية احد ساقيه واحدى زاويتى القاعدة

٩٤ ارسم مثلثا بمعلومية ضلعين والزاوية المحصورة بينهما

٩٥ ارسم مثلثا بمعلومية زاويتين والارتفاع النازل من رأسه الثالثه

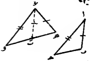
نظرية ٢٤

٩٦ اذا ساوى ضلعان من مثلث نظيريهما من اخر وكانت الزاوية المحصورة بين ضلعي الاول اصغر من نظيرتها في الثاني فالضلع المقابل للزاوية الاولى أصغر من الضلع المقابل للزاوية الثانية

المفروض - مثلثان ا ب ﺣ ، ء ﮬ و وفيهما

ا ب = ء ﮬ ، ا ﺣ = ء و

د ا (د ﮬ ء و



(ش ٤٩) ، (ش ٥٠) ، (ش ٥١)

(شكل ٤٩)

المطلوب اثبات ب ﺣ (ﮬ و

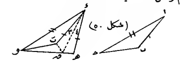
البرهان في الاشكال الثلاثة نطبق △ ا ب ﺣ على △ ء ﮬ و بان نضع ا ﺣ على ء و بحيث تقع ﺣ على و ، ا على ء ومن حيث ان د ا (د ﮬ ء و فيقع ا ب داخل د ﮬ ء و وتقع نقطة ب على احدى نقط ﮬ و في نقطة ت (ش ٤٩) او داخل المثلث ء ﮬ و (ش ٥٠) او خارجه (ش ٥١) فيكون اذن △ ء ت و هو عين △ ا ب ﺣ في الاشكال الثلاثة

في (ش ٤٩) ت و > هـ و (٥)

أو ب هـ > هـ و

في كل من (ش ٥٠) ٦ (ش ٥١) نمد ء ن منصف الزاوية هـ ء ت

ثم نوصل ت ن فيحدث △ ء هـ ن ٦ △ ء ن ت متساويين فيهما



ء ن مشترك

ء هـ = ا ب = ء ت

ح ٤ = ح ٣

اذن △ ء هـ ن = △ ء ن ت

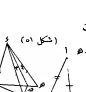
ومن تساويهما ينتج ن ت = ن هـ

وفى △ ت ن و

ت و > ت ن + ن و

أو ت و > هـ ن + ن و

اذن ب هـ > هـ و وهو المطلوب.

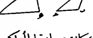


نظريه ٢٥ عكس المتقدمه

٩٧ اذا ساوى ضلعان من مثلث نظيريهما من آخر وكان الضلع الثالث
من الاول اصغر من نظيره فى الثانى تكون الزاوية المقابلة للضلع الثالث
فى الأول أصغر من الزاوية المقابلة للضلع الثالث من الثانى

المفروض - اب = ده 6 اح = دو 6 بح ﴿ هو

(شكل ٥٢)



المطلوب اثباته ﮐا ﴿ ﮐد

البرهان - ان لم تكن ﮐا ﴿ ﮐد كانت مساوية لها أو اكبر

فان كانت ﮐا = ﮐد تساوى المثلثان (٧)

ويكون بح = هو وهو خُلف للفرض

وان كانت ﮐا ﴾ ﮐد وجب ان يكون

بح ﴾ هو (٩٦) وهذا خُلف أيضا

اذن (٣) ﮐا ﴿ ﮐد وهو المطلوب

تمرينات

٩٦ اذا كان منصف مثلث مائلا على الضلع الواقع عليه كان الضلعا
الآخران مختلفين

٩٧ مثلث ا ب حـ فيه ا ب < ا حـ فاذا مد منصفه ا ء كانت د ا ء ب < د ا ء حـ

٩٨ مثلث ا ب حـ فيه ا حـ > ا ب اخذنا على ضلعيه بعدين حـ هـ = ب ء

اثبت أن حـ ء > ب هـ



٩٩٠ مثلث ا ب حـ فيه ا حـ > ا ب اثبت أن كل نقطة من نقط منصفه

ا ء تكون أقرب الى ب من حـ

نظرية ٢٦

٩٨ اذا انزل عمود وموائل على مستقيم من نقطة خارجة عنه كان

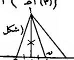
(١) العمود أصغر من كل مائل

(٢) المائلان اللذان بعدا موقعيهما عن موقع العمود متساويان يكونان متساويين

(٣) „ „ „ مختلفان „ مختلفين

واكبرهما ما كان بعد موقعه عن موقع العمود اكبر

المفروض { (١) ا ب ⊥ حـ هـ (٢) ء ب = ب هـ (٣) حـ ب > ب ء } | المطلوب اثباته { (١) ا ب < ا هـ (٢) ا ء = ا هـ (٣) ا حـ > ا ء }



(شكل ٥٣)

البرهان (١) ا ب < ا هـ (٨٧)

(٢) △ ا ء ب = △ ا ب هـ (٧٧)

فيكون د ا ء = ا هـ

(٣) د ب منفرجه (٧٤) فيكون اهـ) ا م وهوالمطلو

٩٩ فرع - من نقطة خارجة عن مستقيم لايمكن مدا كثرمن مستقيم

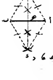
متساويين الى هـذاالمستقيم

١٠٠ تعريف - بعد نقطة عن مستقيم هوالعمود النازل متها علب

تمرين

أى مستقيم لايقابل محيط الدائرة فى اكثر من نقطتين

عمليه ٦ (شكل ٥٤)



١٠١ المطلوب تنصيف مستقيم معلوم ا ب

العمل- نركز فى كل من ا ، ب وبفتحة اكبر من

نصف ا ب نرسم اقواساً تتقاطع فى نقطتى هـ ، ء

فيكون هـ ء منصفا للمستقيم ا ب فى هـ

البرهان - △ ا هـ ء = △ ب هـ ء (٨٢) وعليه د ا هـ ء

= د ب هـ ء اذن △ هـ ا هـ = △ هـ هـ ب (٧٧)

ويكون ا هـ = هـ ب وهوالمطلوب

تمرينات

١ اقسم مستقيما الى جزأين أحدهما ثلاثة اخماس الآخر

١ بيّن بالعمل ان منصفات المثلث تتقاطع فى نقطة واحدة

٢ ارسم مستقيما من رأس مثلث الى الضلع المقابل لها بحيث يزيد عن أحد الضلعين الآخرين بقدر ما ينقص عن الثانى

عمليه ٧

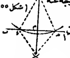
١ المطلوب انزال عمود على مستقيم من نقطة خارجة عنه

المفروض مستقيم اب ونقطه هـ خارجه عنه

والمطلوب انزال عمود من هـ على اب

العمل - نركز فى هـ وبنصف قطر أيا كان

نقطع اب فى نقطتى حـ ، ء ثم نركز



(شكل ٥٥)

فى نقطتى حـ ، ء وبنصف قطر واحد نرسم قوسين يتقاطعان فى

و فيكون هـ و هو العمود المطلوب

(البرهان يشبه برهان العمليه السابقه)

تمرينات

١ بيّن بالعمل أن ارتفاعات المثلث تتقاطع فى نقطة

١ نصف زاويتين من مثلث ومن نقطة تقابل المنصفين انزل أعمدة على أضلاعه وحقق تساوى هذه الاعمدة بالقياس

عملية ٨

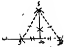
١٠١ المطلوب اقامة عمود على مستقيم من نقطة مفروضة عليه

المفروض - مستقيم ا ب ونقطة ح عليه

والمطلوب اقامة عمود من ح على ا ب

العمل - نركز في ح وبنصف قطر

أياكان نقطع ا ب في نقطتي هـ ، و



(شكل ٥٦)

ثم نركز في هـ ، و وبنصف قطر اكبر من هـ ح نرسم قوسين

يتقاطعان في ء فيكون ح ء هو العمود المطلوب

البرهان - Δ ء هـ ح = Δ ء ح و (٨٢)

وعليه ∠ ء ح هـ = ∠ ء ح و

اذن ء ح عمود على ا ب

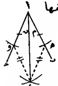
تمرين

١٠٦ بيّن بالعمل ان الاعمدة المقامة على أضلاع مثلث من منتصفاتها تتقاطع في نقطة واحدة

عمليه ٩

١ المطلوب تنصيف زاوية معلومة

(شكل ٥٧)



المفروض - ∠ ب ا حـ والمطلوب تنصيفها

العمل - نركز فى رأسها وبنصف قطر أياكان نقطع ضلعيها فى هـ ، و ثم نركز فى كل من هـ ، و وبنصف قطر اكبر من نصف هـ و نرسم قوسين يتقاطعان فى ء فيكون ا ء هو النصف المطلوب

البرهان - △ ا هـ ء = △ ا ء و (٨٢) وبـذا تكون ∠م = ∠ ن أى أن ا ء منصف لزاوية ب ا حـ وهو المطلوب

تمرينات

المطلوب تقسيم زاوية معلومة الى أربعة أقسام متساوية

بيّن بالعمل ان منصفات زوايا المثلث تتقاطع فى نقطة واحدة

نصف أربع الزوايا الحادثة من مستقيمين متقاطعين مع الاختصار فى العمل

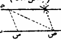
نصف الزاويتين الحادثتين من تقابل مستقيم بآخر واذكر اتجاه احد المنصفين بالنسبة للآخر

عمليه ١٠

١٠٣ المطلوب رسم موازٍ لمستقيم معلوم من نقطة خارجة عنه

المفروض مستقيم ا ب ونقطة هـ

(شكل ٥٨)



المطلوب مد موازٍ من هـ الى المستقيم ا ب

العمل - ركز في احدى نقط ا ب ولتكن س

وبفتحة اختيارية نقطع ا ب في ص ثم ركز في هـ وبالفتحة عينها

نرسم قوسا ثم ركز في ص وبفتحة تساوي س هـ نرسم قوسا

آخر يقطع الاول في نقطة م فيكون م هـ هو الموازي المطلوب

البرهان لو وصل هـ ص يحدث

∆ هـ م ص = ∆ هـ ص س

لان هـ ص مشترك

هـ م = س ص بالعمل

هـ س = م ص بالعمل

ومن تساويهما ينتج

∠ م هـ ص = ∠ هـ ص س

وعلى ذلك يكون هـ م ॥ ا ب وهو المطلوب

تمرينات متنوعة
(على الدعاوى العمليه)

(ملاحظة) تستعمل فى حل هذه التمرينات الدوّاره (البرجل) والمسطرة غير المدرجة

١٠٧ من نقطتين فى جهتين مختلفتين من مستقيم ارسم مستقيمين يتقابل احدهما مع الآخر فى احدى نقط المستقيم ويصنعان معه زاويتين متساويتين

١٠٨ المعلوم قاعدة مثلث متساوى الساقين والارتفاع النازل عليها والمطلوب رسمه

١٠٩ عين نقطة على مستقيم معلوم تكون متساوية البعدين عن ضلعى زاوية معلومة

١١٠ ارسم مستقيما يمر بنقطة داخل زاوية وينتهى بضلعيها بحيث تكون النقطة فى منتصفه

١١١ المطلوب تقسيم زاوية قائمة الى ثلاثة اقسام متساوية

• ١١٢ المعلوم مستقيم ونقطتان خارجتان عنه والمطلوب رسم مستقيمين يمر احدهما بالاولى والآخر بالثانية بحيث يكونان مع المستقيم المعلوم مثلثا متساوى الأضلاع

١١٣ المعلوم زاوية والمطلوب رسم مستقيم يصنع مع ضلعيها زاويتين احداهما ثلاثة أمثال الاخرى

١١٤ المطلوب رسم مواز لاحد اضلاع مثلث بحيث يكون مساوياً لمجموع قطعتى الضلعين المحصورتين بينه وبين موازيه

١١٥ عين نقطه مثل ء على أحد ضلعى القائمة من مثلث قائم الزاوية ا ب حـ بحيث يكون ء ب مساويا للعمود النازل من ء على الوتر ا د

١١٦ المطلوب رسم مواز لاحد أضلاع مثلث منته بالضلعين الآخرين ويساوى طولاً معلوماً

١١٧ معلوم أحد ارتفاعات مثلث متساوى الاضلاع والمطلوب رسمه

١١٨ ارسم مثلثا قائم الزاوية معلومامنه وتر وضلع

١١٩ معلوم محيط مثلث وزاويتان منه والمطلوب رسمه

١٢٠ عين نقطة على مستقيم معلوم بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين خارجتين عنه وفى جهة واحدة منه أصغر ما يمكن

١٢١ معلوم من مثلث ضلع واحدى الزاويتين المجاورتين له ومجموع الضلعين الآخرين والمطلوب رسمه

١٢٢ ارسم مثلثاً قائم الزاوية معلوماً منه احدى زاويتيه الحادتين ومجموع ضلعي القائمة

١٢٣ ارسم مثلثاً قائم الزاوية معلوماً منه الوتر ومجموع الضلعين الآخرين

١٢٤ ارسم مثلثاً قائم الزاوية معلوماً منه الوتر وفرق الضلعين الآخرين

١٢٥ ارسم مثلثاً متساوي الساقين معلوماً منه محيطه والارتفاع النازل على القاعدة

(المضلعات)

تعريفات

١٠٤ المضلع هو جزء من مستوٍ محاط بمستقيمات متقاطعة مثنى مثنى وتسمى هذه المستقيمات أضلاع المضلع والزوايا التي تتكون عنها تسمى زواياه كما ان رؤوس هذه الزوايا تسمى رؤوسه



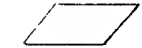
١٠٥ قطر المضلع هو كل مستقيم واصل بين

رأسين غير متجاورتين مثل ا هـ

١٠٠ الشكل الرباعي هو مضلع له أربعة أضلاع

١٠١ متوازي الأضلاع هو شكل رباعي
كل ضلعين فيه متقابلين متوازيان

(متوازي أضلاع)



١٠٨ المعين - هو شكل رباعي أضلاعه متساوية



(معين)

١٠٩ المستطيل - هو شكل رباعي زوايا الاربعة
متساوية وستعلم انها قوائم



(مستطيل)

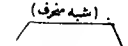
١١٠ المربع - هو شكل رباعي اضلاعه متساوية
١١١ وزواياه كذلك



(مربع)

شبه المنحرف - هو شكل رباعي فيه
ضلعان متوازيان يسميان قاعدتيه

(شبه منحرف)



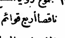
١١٢ المضلع المنتظم هو ماكانت
أضلاعه متساوية وزواياه كذلك

(مضلع منتظم)



نظرية ٢٧

١١٣ مجموع زوايا المضلع تساوى زوايا قوائم بقدر ضعف عدد أضلاعه ناقصا أربع قوائم



(شكل ٥٩)

المفروض - المضلع ا ب ء د ه

المطلوب اثباته - زوايا هذا المضلع تساوى قوائم عددها ٥×٢-٤

البرهان - نأخذ نقطة داخل المضلع مثل م ثم نوصلها برؤوسه فيتكون على كل ضلع مثلث وكل مثلث زواياه تساوى قائمتين أعنى أن القائمتين مكررتان مرات بقدر عدد الاضلاع فيكون مجموع زوايا المثلثات يساوى قوائم عددها ٥ × ٢

لكن مجموع زوايا المثلثات يزيد عن مجموع زوايا المضلع بقدر الزوايا المتكونة حول نقطة م فلو طرحنا من مجموع زوايا المثلثات أربع قوائم لكان الباقى هو زوايا المضلع وعلى ذلك تكون زوايا المضلع = ٥ × ٢ - ٤ قوائم وهو المطلوب

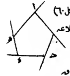
(تنبيه) زوايا أى شكل رباعى = ٤ قوائم

فرع - زوايا المستطيل والمربع كل منها قائمة

نظريه ٢٨

١١٤ اذا مدت أضلاع أى مضلع بالترتيب متجهة واحدة كان مجموع الزوايا الخارجة أربع قوائم

(شكل ٦٠)



المفروض - مضلع ا ب ﺤ ء ﻫ مدت أضلاعه كما فى الشكل

المطلوب اثباته - مجموع الزوايا الخارجة = ٤ ق

البرهان - مجموع الزوايا الداخلة والخارجة يحتوى على قوائم بقدر ضعف أضلاع المضلع (لان كل ضلع مد كوّن مع الآخر زاويتين متكاملتين) معلوم ان مجموع الزوايا الداخلة يحتوى دائما على قوائم بقدر ضعف الاضلاع ناقصا اربع قوائم (١١٣) اذن مجموع الزوايا الخارجة على حدته يساوى اربع قوائم

تمرينات

١٣٦ اثبت النظرية السابقة بأخذ نقطة فى مستوى المضلع ومد موازيات منها لأضلاعه

١٣٧ المطلوب ايجاد مقدار كل زاوية داخلة من مخمس منتظم

١٣٨ مجموع زوايا مضلع يساوى ثمانى قوائم ما عدد أضلاعه .

١٢٩ اذا كانت كل زاوية داخلة من مضلع منتظم ١٥٠ درجة فما عدد أضلاعه

١٣٠ ما نسبة كل زاوية من مثمن منتظم أو من معشر منتظم الى القائمة

١٣١ اذا كانت زوايا مخمس مناسبة الى ١ و ٣ و ٦ و ٦ و ٩ و ١١ فما نسبة كل منها الى القائمة

١٣٢ مجموع الزوايا الخارجة من مضلع يساوى مجموع زواياه الداخلة ما عدد أضلاعه

١٣٣ ما عدد الاشكال المنتظمة الممكن استعمالها فى التبليط وهل يمكن التبليط بنوعين فأكثر من تلك الاشكال المنتظمة معًا

١٣٤ مضلعان منتظمان عدد أضلاع احدهما ضعف الآخر والنسبة بين زاويتين منهما $\frac{9}{8}$ ما عدد أضلاع كل منهما

نظريه ٢٩

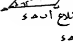
١١٥ فى كل متوازى اضلاع:

(١) القطر يقسمه الى مثلثين متساويين

(٢) الضلعان المتقابلان متساويان

(٣) الزاويتان المتقابلتان متساويتان (ت ٦١)

(٤) كل من القطرين ينصف الآخر



المفروض فى الاحوال الاربعة متوازى الاضلاع ا ب حـ ء

(١) المطلوب اثباته - Δ ا ب حـ = Δ ا حـ ء

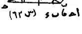
البرهان - Δ ا ب حـ = Δ ا حـ ء (٧٨)

(٢) المطلوب اثباته ا ء = ب حـ ، ا ب = حـ ء

البرهان - Δ ا ب حـ = ا حـ ء ومن تساويهما ينتج

ا ء = ب حـ ، ا ب = حـ ء

(٣) المطلوب اثباته - ∠ ب = ∠ ء ، ∠ ب ا ء = ∠ ب حـ ء



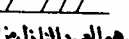
البرهان - يستنتج من (١) ,,

(٤) المطلوب اثباته - م تنصف كلا من ا حـ ، ب ء (ت ٦٢)

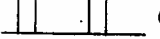
البرهان = Δ ا م ء = Δ ب م حـ

ومن تساويهما ينتج ا م = م حـ ، ب م = م ء وهو المطلوب

١١٦ فرع (١) المستقيمات المتوازية المحصورة بين متوازيين كلها متساوية (شكل ٦٣)



تعريف - بعد المستقيمين المتوازيين هو العمود النازل من نقطة من احدهما على الآخر (شكل ٦٤)



١١٧ فرع (٢) المتوازيان على بعد واحد في جميع امتدادهما

نظريه ٣٠

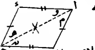
(بعضها عكس بعض المتقدمة)

١١٨ الشكل الرباعي يكون متوازي الأضلاع
(١) اذا كان كل ضلعين متقابلين منه متساويين
(٢) ،، ،، زاويتين متقابلتين منه متساويتين
(٣) ،، ،، ضلعان متقابلان منه متساويين ومتوازيين
(٤) ،، ،، كل قطر منه ينصف الآخر

(١) المفروض - الشكل الرباعي اب حـ ء فيه

اء = ب حـ و اب = ء حـ

المطلوب اثباته اب حـ ء متوازي أضلاع

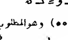


(شكل ٦٥)

البرهان - نمد القطر اﺣ فيحدث Δ ا ب ﺣ = Δ ا ﺣ ء (٨٢)

ومن تساويهما ينتج ∠م = ∠ﻫ ، ∠و = ∠ﻩ

اذن ا ب ∥ ء ﺣ ، ا ء ∥ ب ﺣ (٥٥) وهو المطلوب



(شكل ٦٦)

(٢) المفروض - الشكل الرباعى ا ب ﺣ ء

فيه ∠ا = ∠ﺣ ، ∠ب = ∠ء

المطلوب اثباته - ا ب ﺣ ء متوازى أضلاع

البرهان - ∠ا = ∠ﺣ فرضاً

" ∠ب = ∠ء "

يجمع

∠ا + ∠ب = ∠ﺣ + ∠ء

ومن حيث أن مجموع زوايا الشكل الرباعى انقسم الى قسمين متساويين

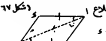
فيكون كل قسم منهما يساوى قائمتين أى أن

∠ا + ∠ب = ٢ ق

ويكون ا ء ∥ ب ﺣ وبالمثل ا ب ∥ ء ﺣ (٥٥)

اذن ا ب ﺣ ء متوازى أضلاع

(شكل ٦٧)



المفروض - الشكل الرباعى ا ب ﺣ ء

فيه ا ء ⋕ ب ﺣ

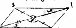
المطلوب اثباته - ا ب ﺣ ﺀ متوازى أضلاع

البرهان - نمد القطر ا ﺣ فيحدث △ ا ب ﺣ = △ ا ﺣ ﺀ (٧٧)

ومن تساويهما ينتج ﺩ ﻩ = ﺩ م فيكون ا ب ∥ ﺀ ﺣ (٥٥)

(٤) المفروض الشكل الرباعى ا ب ﺣ ﺀ فيه نقطة م تنصف كلا من احد ب ﺀ

(شكل ٦٨)



المطلوب اثباته - ا ب ﺣ ﺀ متوازى أضلاع

البرهان - △ ا م ﺀ = △ ب م ﺣ (٧٧)

ومن تساويهما ينتج ﺩ ﻩ = ﺩ و ، ا ﺀ = ب ﺣ

فيكون ا ﺀ ∥ ب ﺣ اذن ا ب ﺣ ﺀ متوازى أضلاع وهو المطلوب

١١٩ فرع - المعين والمربع والمستطيل كل منها متوازى أضلاع

تمرينات

١٣٥ قطرا المستطيل متساويان

١٣٦ ارسم مستطيلا طوله ٤ سنتم وعرضه ٣ سنتم وقس قطره

١٣٧ قطرا المربع متعامدان ومتساويان وكل منهما ينصف الآخر

١٣٨ قطرا المعين متعامدان وكل منهما ينصف الآخر

١٣٩ ارسم مربعا معلوما أحد قطريه

١٤٠ ارسم معينا معلوما قطراه

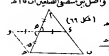
١٤١ ارسم معينا معلوما أحد قطريه وأحد أضلاعه

١٤٢ ارسم شبه منحرف بمعلومية أضلاعه

نظرية ٣١

١١٧ المستقيم الواصل بين منتصفي ضلعي مثلث يكون موازيا للثالث ويساوي نصفه

المفروض - مثلث ا ب ح فيه ء ه واصل بين منتصفي الضلعين ا ب ، ا ح



(شكل ٦٩)

المطلوب اثبات { (١) ء ه ∥ ب ح
(٢) ء ه = ب ح / ٢

(١) ، (٢) البرهان نمد ه ء على استقامته ونأخذ عليه البعد ه و = ء ه ثم نوصل و ح فيحدث △ ا ء ه = △ ه ح و (٧٧)

ومن تساويهما ينتج ه و = ا ء = ء ب

ح و ه = ح ا

ومن هذه المتساويات يعلم ان ء ب ‡ ح و

اذن ء ب ح و متوازي أضلاع وعليه يكون ء ه ∥ ب ح

ومن حيث ان ء ه = ء و / ٢ يكون

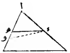
ء ه = ب ح / ٢ وهو المطلوب

نظريه ٣٢

١١٨ اذا مد مستقيم من منتصف ضلع مثلث موازيا لاحد الضلعين الآخرين يتلاقى مع الثالث فى منتصفه ويساوى نصف موازيه

المفروض ا ب حـ مد من ء منتصف ا ب، ء هـ ॥ ب حـ

(شكل ٧٠)



المطلوب اثباته { (١) ء هـ ينصف ا حـ
(٢) ء هـ = $\frac{\text{ب حـ}}{٢}$ }

البرهان ان لم تكن نقطة هـ منتصف ا حـ كانت نقطة أخرى مثل و هى منتصفه وعليه يكون و ء ॥ ب حـ (١١٧)

وهو خلف نشأ من عدم التسليم بان هـ فى منتصف ا حـ

اذن نقطة هـ فى منتصف ا حـ

ويكون أيضا ء هـ = $\frac{\text{ب حـ}}{٢}$ (١١٧)

تمرينات

١٤٣ احدى زوايا مثلث تساوى نظيرتها من آخر وكل من الضلعين المحيطين بها ضعف نظيره من الثانى اثبت ان الضلع الثالث من الاول ضعف نظيره من الثانى

١٤٤ ا ب ح ء متوازى أضلاع ونقطتا هـ ، و منتصفا الضلعين ا ب ، حـ ء اثبت أن المستقيمين ا و ، حـ هـ يقسمان القطر ب ء الى ثلاثة أقسام متساوية

١٤٥ منصفات المثلث تتقاطع فى نقطة واحدة تقسم كلا منها الى قسمين احدهما ضعف الآخر

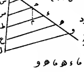
١٤٦ تمرين هام - منصف المثلث القائم الزاوية الممدود من رأس القائمة يساوى نصف وترها

١٤٧ فى المثلث ا ب حـ مد الارتفاعان ا ء ، ب هـ اثبت أن منتصف ا ب على بعدين متساويين من نقطتى ء ، هـ

عملية ١١

١١٩ المطلوب تقسيم مستقيم معلوم الى اجزاء متساوية

المفروض - مستقيم ا ل والمطلوب تقسيمه الى اقسام متساوية ولتكن خمسة أقسام مثلا



(شكل ٧١)

العمل - نمد من ا مستقيما غير محدود ونأخذ عليه خمسة أبعاد متساوية اياكانت ولتكن ا ب ، ب حـ ، حـ ء ، ء هـ ، هـ و

ثم توصل ول ثم غد من ب ٥ حـ ٥ ء ٥ هـ

موازيات للمستقيم ول فتقبل على ال خمسة أقسام متساوية

البرهان - نمد من احدى نقط تقاسيم او موازيا للمستقيم ال ولتكن

حـ م فيكون ∆ حـ ء م = ∆ ا ب س (٧٨) وعليه

حـ م = ا س وبما أن حـ م = ص ط (٧٨١) ينتج ا س =

ص ط وبالمثل نثبت تساوى باقى الأقسام

تمـرينات

١٤٨ اقسم مستقيما الى قسمين أحدهما ٢/٥ الآخر

١٤٩ ارسم مثلثا متساوى الأضلاع معلوما محيطه

١٥٠ ارسم مثلثا متساوى الساقين بحيث يكون محيطه يساوى مستقيما معلوما وقاعدته تساوى نصف احد ساقيه

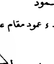
نظرية ٣٣

١٢٠ اذا اقيم عمود على مستقيم من منتصفه

(١) فكل نقطة من العمود تكون على بعدين متساويين من نهايتي المستقيم

(٢) كل نقطة خارجة عن العمود تكون على بعدين مختلفين من نهايتي المستقيم واكبرهما ماكان قاطعاً للعمود

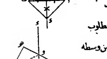
(١) المفروض - مستقيم ا ب ٥ حـ ء عمود مقام عليه من منتصفه



المطلوب اثباته - ء ا = ء ب

البرهان - △ ء ا حـ = △ ء حـ ب

ومن تساويهما ينتج ء ا = ء ب وهو المطلوب



المفروض - ا ب ٥ حـ ء عمود عليه من وسطه

ونقطة هـ خارجة عن هذا العمود

المطلوب اثباته - هـ ب) هـ ا

البرهان - نصل و ب فينتج و ا = و ب (١) من هذه النظرية

وفي المثلث هـ ب و: هـ ب (هـ و + و ب

أو هـ ب (هـ و + و ا

هـ ب (هـ ا وهو المطلوب

نظريه ٣٤ عكس المتقدمة

١٢١ (١) كل نقطة على بعدين متساويين من نهايتى مستقيم تكون احدى نقط العمود المقام عليه من منتصفه

(٢) كل نقطه على بعدين مختلفين من نهايتى مستقيم تكون خارجة عن هذا العمود



(شكل ٧٣)

(١) المفروض- مستقيم اب ؛ حا = حب

المطلوب لاثباته - ح إحدى نقط العمود المقام من منتصف اب

البرهان - نوصل من ح الى ء منتصف اب فيحدث

∆ احء = ∆ حءب (٨٢)

وعلى تساويهما تتساوى زاويتى ء ويكون حء عمودا على اب

اذن نقطة ح هى احدى نقط العمود المقام من منتصف اب عليه وهو المطلوب

(شكل ٧٤)



(٢) المفروض - نقطة ح على بعدين مختلفين من نهايتى اب أعنى حا > حب

المطلوب اثباته - ح ليست على العمود المقام على اب من منتصفه

البرهان - اذا كانت ح على العمود المقام على اب من منتصفه لوجب ان يكون

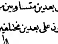
حـ ا = حـ ب (١٢٠) وهذا خلف

اذن نقطة حـ خارجة عن هذا العمود   وهو المطلوب

نظريه ٣٥

١٢٢ (١) كل نقطة من منصف زاوية تكون على بعدين متساويين من ضلعيها

(٢) كل نقطة خارجة عن هذا المنصف تكون على بعدين مختلفين من ضلعي الزاوية واكبرهما ما كان قاطعاً للمنصف



المفروض - نقطة ب على منصف ∠ حـ ا د

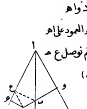
المطلوب اثبات ب حـ (العمود على حـ ا) = ب د (العمود على د ا)

البرهان - Δ ا ب حـ = Δ ا ب د (٧٩) ومن تساويهما ينتج ب حـ = ب د وهو المطلوب

(٢) المفروض - نقطة حـ خارجة عن منصف ∠ و ا هـ

المطلوب اثبات حـ و العمود على او > حـ هـ العمود على اهـ

البرهان - ننزل ب ع عموداً على اهـ ثم نوصل ع حـ



فيكون حـ ع < ع ب + ب حـ (٨٨)

لكن ع ب = و ب (١٢٢)

اذن حـ ع < و ب + ب حـ (و حـ)

أو حـ ع < و حـ وحيث ان حـ هـ < حـ ع ينتج حـ هـ < و حـ (وهو المطلوب)

نظريه ٣٦ عكس المتقدمة

١٢٣ (١) كل نقطة على بعدين متساويين من ضلعي زاوية تكون على منصفها

(٢) كل نقطة على بعدين مختلفين من ضلعي زاوية تكون خارجة عن منصفها



(شكل ٧٦)

(١) المفروض - ب هـ (⊥ هـ ا) = ب ء (⊥ ء ا)

المطلوب اثباته - ب على منصف ∠ هـ ا ء

البرهان - نوصل ا ب فيحدث

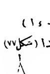
∆ ا هـ ب = ∆ ا ب ء (٨٣)

ومن تساويهما ينتج ∠ ٢ = ∠ ٣ أى أن نقطة ب على منصف

∠ هـ ا ء وهو المطلوب

(٢) المفروض - ب هـ (⊥ هـ ا) > ب ء (⊥ ء ا)

المطلوب اثباته - نقطة ب ليست على منصف ∠ ا (شكل ٧٧)



البرهان - لو كانت ب على منصف ∠ ا لوجب

أن يكون هـ ب = ب ء (١٢٢) وهو خلف

اذن نقطة ب ليست على منصف ∠ ا وهو المطلوب

(تمرين هام)

١٥١ منصفات زوايا المثلث تتقاطع فى نقطة واحدة

المسار الهندسى (المحل الهندسى)

١٢٤ المسار الهندسى لنقطه هو الخط الذى يتولد عنها اثناء سيرها مقيدة بشرط أو جملة شروط معينة

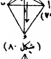
أمثلة

(ا) اذا سارت نقطة وهى حافظة لبعد معين بينها وبين نقطة ثابتة تولد عنها خط منحن (محيط دائرة) يسمى مسارها الهندسى
(ش ٧٨)



(ش ٧٨)

(ب) المسار الهندسى للنقطة التى على بعدين متساويين من نقطتين ثابتتين هو العمود المقام من منتصف المستقيم الواصل بينهما (راجع نظرية ٣٤)



(شكل ٧٩)

المسار الهندسى للنقطة التى على بعدين متساويين من ضلعى زاوية هو المستقيم المنصف لهذه الزاوية (راجع نظرية ٣٦)

(شكل ٨٠)



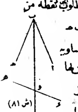
تقاطع المسارات الهندسية

(تمهيد) - تقاطع المسارات الهندسية بعضها مع بعض يوصلنا الى حل كثير من المسائل الهندسية وكذا تقاطعها مع خطوط اخرى واليك المثال

١٢٥ عين نقطة على مستقيم معلوم بحيث تكون على بعدين متساويين

عن ضلعي زاوية معلومة

المفروض - د ا ب هـ والمستقيم ء هـ والمطلوب نقطة من ء هـ تكون متساوية البعدين عن ا ب ٬ ب هـ



(ش ٨١)

الحل - تقدم أن المسار الهندسي للنقط المتساوية البعدين عن ضلعي زاوية هو المستقيم المنصف لها اذن النقطة المطلوبة لابد ان تكون احد نقط المنصف لزاوية ا ب هـ وأيضا النقطه عينها يلزم ان توجد على هـ ء حسب منطوق السؤال فلاجل ايجاد النقطة المذكورة غد منصف د ا ب هـ حتى يقابل ء هـ في و فتكون نقطة و هي المطلوبة

(تنبيـه) اذا كان ء هـ يوازي المنصف تكون المسئلة عديمة الحل

(تمرينات على المسار الهندسي)

١٥٢ عين المسار الهندسي للنقطه التي تكون على بعد معين من مستقيم معلوم

١٥٣ عين المسار الهندسي للنقطة التي تكون على بعدين متساويين من مستقيمين متوازيين

١٥٤ ما هو المسار الهندسى لمنتصف مستقيم واصل من نقطة معلومة الى مستقيم معلوم

١٥٥ ما هو المسار الهندسى لراس الزاوية القائمة من مثلث قائم الزاوية وتره ثابت

١٥٦ ما هو المسار الهندسى لمركز دائرة ملاصقة لاخرى ومتحركة حولها

١٥٧ ما هو المسار الهندسى لمنتصف مستقيم متحرك ومتكئ بنهايتيه على مستقيمين متعامدين

١٥٨ عين المسار الهندسى للنقطه التى مجموع بعديها عن ضلعى زاوية يساوى مستقيماً معلوماً

تمرينات على تقاطع المسارات الهندسية

١٥٩ عين نقطه على مستقيم معلوم بحيث تكون متساوية البعدين عن نقطتين معلومتين خارجتين عنه

١٦٠ عين نقطه على مستقيم بحيث يكون بعداها عن مستقيمين اخرين متقاطعين متساويين

١٦١ المطلوب ايجاد نقطة تكون متساوية البعدين عن نقطتين معلومتين وعلى بعد معين من مستقيم معلوم

١٦٢ المطلوب ايجاد نقطه تكون متساوية البعدين عن نقطتين معلومتين وكذا عن مستقيمين متوازيين

١٦٣ المطلوب ايجاد نقطة تكون متساوية البعدين عن نقطتين معلومتين وكذا عن مستقيمين متقاطعين

١٦٤ عين نقطة داخل زاوية تكون على بعد معلوم من كل من ضلعيها

١٦٥ عين نقطه تكون متساوية الابعاد عن أضلاع مثلث

١٦٦ عين نقطه تكون متساوية الابعاد عن ر ء وس مثلث

١٦٧ عين نقطه على مستقيم يكون بعدها عن نقطة خارجة عنه يساوى مستقيماً معلوماً

(تمرينات عمومية)

١٦٨ العمودان النازلان على قطر متوازى أضلاع من الزاويتين المتقابلتين لهذا القطر يكونان متساويين

١٦٩ كل مستقيم واصل بين منصفي ضلعين من مثلث ينصف كل مستقيم واصل بين نقطة من الضلع الثالث ورأس الزاوية المقابلة له

١٧٠ كل مستقيم يمر بمنصف قطر متوازى أضلاع وينتهى بضلعين منه يكون منصفاً بهذا القطر

١٧١ زاويتا القاعدة من شبه منحرف متساوى الساقين متساويتان وكذا

قطراه متساويان

١٧٢ اذاكانت الزاويتان المجاورتان لاحدى قاعدتى شبه منحرف متساويتين تكون الزاويتان المجاورتان للقاعدة الاخرى متساويتين أيضا ويكون شبه المنحرف متساوى الساقين

١٧٣ اذاكانت القاعدة العليا من شبه منحرف متساوى الساقين تساوى مجموع ضلعيه غير المتوازيين فالمستقيمان الواصلان من منتصفها الى نهايتي القاعدة السفلى يقسمان الشكل الى ثلاثة مثلثات كل منها متساوى الساقين

١٧٤ الزاوية الخارجة عن مسدس منتظم تساوى كل زاوية من مثلث متساوى الأضلاع

١٧٥ اذاكان احدى قطرى شكل رباعى ينصف زاويتي الشكل يكون عمودا على القطر الآخر

١٧٦ قطرا المعين غير متساويين

١٧٧ اثبت ان الزاوية الحادثة من تقابل منصفى زاويتين متقابلتين من شكل رباعى تساوى نصف مجموع الزاويتين الاخريين

١٧٨ اثبت انه اذا مد الضلعان ب ا 6 حـ ء من الشكل الرباعى ا ب حـ ء حتى تقابلا فى هـ يكون محيط المثلث هـ ب حـ اكبر من محيط ا ب حـ ء

١٧٩ اذاكان ا ب ﺣ ﺀ شكلا رباعياً فيه ﺩ ب = ﺩ ﺀ ومد الضلعان ا ب ٯ ﺀ ﺣ حتى تقابلا فى ﮬ وكذا الضلعان ا ﺀ ٯ ب ﺣ حتى تقابلا فى و . فاثبت ان ﺩ ﮬ = ﺩ و

١٨٠ المستقيمات الواصلة بين منصفات كل ضلعين متجاورين من معين تكوّن مستطيلًا

١٨١ كل مستقيم يمر بمنصف احد قطرى متوازى أضلاع يقسم متوازى الاضلاع الى قسمين متساويين

١٨٢ الشكلان الرباعيان يكونان متساويين اذاكان فى احدهما ثلاث زوايا وضلعا احداها مساوية لنظائرها من الآخر

١٨٣ منصفات الزوايا الخارجة من مستطيل تكوّن مربعًا

١٨٤ منصفات زوايا متوازى الأضلاع تكوّن مستطيلًا

١٨٥ منصفات زوايا الشكل الرباعى تكوّن شكلا رباعيا اخر كل زاويتين متقابلتين منه متكاملتان

١٨٦ المستقيم الواصل من رأس مثلث الى منصف الضلع المقابل أصغر من نصف مجموع الضلعين الآخرين

١٨٧ الشكلان الرباعيان يكونان متساويين اذاكان فى احدهما

ثلاثة أضلاع والزاويتان المحصورتان بينها مساوية لنظائرها من الآخر

١٨٨ اذا كان منصف زاوية من مثلث ينصف الضلع المقابل لها يكون المثلث متساوى الساقين

١٨٩ المستقيمات الواصلة بين منصفات كل ضلعين متجاورين من شكل رباعى تكون متوازى أضلاع محيطه يساوى مجموع قطرى الشكل الرباعى

١٩٠ اذا مدت اضلاع مخمس ليس فيه ضلعان متوازيان حتى تقابلت يكون مجموع الزوايا الحادثة من تقابلها مساويا قائمتين

١٩١ مجموع المستقيمات الواصله من رءوس شكل رباعى الى نقطة داخلة اكبر من مجموع قطريه

١٩٢ اذا كان الضلع حـ ب فى المثلث ا ب حـ اكبر من حـ ا ومدا على امتدادهما من جهتى ب ، ا الى ء ، و بحيث يكون ب ء مساويا ا و فاثبت أن ء ا $>$ ء ب

١٩٣ المعلوم أن أحد ضلعى زاوية مثلث اكبر من الآخر والمطلوب اثبات ان كل مستقيم واصل من رأس الزاوية الى الضلع المقابل لها يكون أصغر من الضلع الاكبر

١٩٤ الخط المنصف لاى زاوية من مثلث مختلف الأضلاع يقسم الضلع

المقابل لها الى جزأين اكبرهما يجاور الضلع الاكبر

١٩٥ مجموع العمودين النازلين من احدى نقط قاعدة مثلث متساوى الساقين على الساقين ثابت

١٩٦ اذا كانت النقطة ء منصفة الضلع ب ﻫ من المثلث ا ب ﻫ والنقطه ﻫ منصفة الضلع ا ء ووصل ب ﻫ ومد حتى قابل ا ﻫ فى و تكون و واقعة فى ثلث ا ﻫ

١٩٧ ارسم مربعاً معلوماً مجموع ضلعه وقطره

١٩٨ ارسم مربعاً فى مثلث متساوى الأضلاع

١٩٩ ارسم مستطيلا مع معلومية محيطه واحد قطريه

٢٠٠ اذا كان مقدار كل زاوية من مضلع منتظم ½ ١٧٦ فما عدد أضلاعه

٢٠١ ارسم مربعاً فى مثلث قائم الزاوية بحيث تكون الزاوية القائمة من المثلث احدى زوايا المربع

٢٠٢ ارسم على ب ﻫ شكلا رباعيا بحيث يكون كل ضلع من الثلاثة الأضلاع نصف ب ﻫ

٢٠٣ الزوايا ا ، ﻫ ، ﻫ من المسدس ا ب ﻫ ء ﻫ و متساوية وكل منها ضعف كل من ب ، ء ، و والمطلوب ايجاد النسبة بين

زاوية ا والزاوية القائمة

٢٠٤ اذا اخذ على ضلعي الزاوية ا البعد اب يساوي البعد اء ثم البعد ب هـ يساوي دو ثم مد ب و ٦ ء هـ فتقاطعا في نقطة م فاثبت ان نقطة م هي احدى نقط المنصف للزاوية ا

٢٠٥ كل مستقيم يقابل احد المتوازيين لابد ان يقابل الآخر

٢٠٦ اذا كانت احدى زاويتي القاعدة من مثلث متساوي الساقين تساوي $\frac{1}{2}$ ور فامقدار زاوية رأسه

٢٠٧ المثلث اب هـ متساوي الساقين وقاعدته هي ب هـ فاذا مد هـ ا على استقامته واخذ عليه البعد اء يساوي اهـ فبرهن على أن ء ب عمود على ب هـ

٢٠٨ اذا اخذ على قاعدة مثلث متساوي الساقين نقطة ومد منها موازيًا للساقين فاثبت ان محيط المنحرف الناتج يساوي مجموع الساقين

٢٠٩ اذا كان منصف الزاوية الخارجة من مثلث يوازي احد الأضلاع يكون المثلث متساوي الساقين

٢١٠ اذا كان المستقيم ب و في المثلث اب هـ منصفا لـ ب ٦ هـ ء منصفا لـ هـ ثم انزل من ا المستقيم اع عموديًا على هـ وأيضا ام عموديا على ب و فاثبت ان ع م موازٍ ب هـ

٢١١ منصفا الزاويتين اللتين أضلاعهما متوازية يكونان متوازيين أو متعامدين

٢١٢ المستقيم الواصل بين منصفي الضلعين غير المتوازيين في شبه المنحرف يكون موازيا لكل من القاعدتين ويساوي نصف مجموعهما

٢١٣ في كل شبه منحرف متساوي الساقين الزاويتان المتقابلتان متكاملتان

٢١٤ العمودان المقامان على منتصفي ضلعي القائمة يتقاطعان في منتصف الوتر

٢١٥ اذا كان المثلث ا ب هـ حاد الزاوية في ا فان منصف المثلث المرسوم من ا يكون اكبر من نصف القاعدة ب هـ

٢١٦ في اى مثلث ا ب هـ اذا رسم منصف المثلث من ا ونصف الضلعان ا ب 6 ا هـ بنقطتين ء 6 هـ يكون المنصف والمستقيم ء هـ ينصف احدهما الآخر

٢١٧ فرق بعدى اى نقطة من امتداد قاعدة مثلث متساوي الساقين عن الساقين يساوى كمية ثابتة وهي العمود النازل من احدى رأسي القاعدة على احد الساقين

٢١٨ ارتفاعات المثلث المتساوي الاضلاع متساوية

٢١٩ كل نقطة داخل مثلث متساوي الاضلاع يكون مجموع ابعادها

عن الاضلاع يساوى كمية ثابتة وهى ارتفاع المثلث المتساوى الاضلاع

٢٢٠ منصفا ضلعين غير متجاورين من شكل رباعى ومنصفا قطريه تكون متوازى أضلاع

٢٢١ المعلوم نقطتان داخل زاوية والمطلوب ايجاد أقرب خط منكسر ينتهى بالنقطتين ويمر بضلعى الزاوية

٢٢٢ منصف المثلث الواصل الى الضلع الاكبر أصغر من منصف المثلث الواصل الى الضلع الاصغر

٢٢٣ اذا وصل بين منصفات أضلاع أى شكل رباعى فمتوازى الأضلاع الناتج تكون مساحته تساوى ½ مساحة الشكل الرباعى المعلوم

٢٢٤ اذا مدت أضلاع المسدس المنتظم غير المجاورة على استقامتها يتكون من ذلك مثلث متساوى الاضلاع

٢٢٥ اذا اخذت فى المربع ا ب حـ ء الابعاد ا و = ء هـ = هـ ل = م ب فاثبت أن و م ل هـ مربع

٢٢٦ اذا كان العمودان النازلان من رأسى مثلث على ضلعين منه متساويين يكون المثلث متساوى الساقين

٢٢٧ اذا كان فى الدائرة م قطران متعامدان ا ب ، ء حـ ثم من نقطة هـ اقيم

العمود هو و على م ء وقابل المحيط فى و ثم من نقطه و انزل العمود
وع على ا ب فاثبت ان هع = داعًا نصف لقطرمهما كان محل هـ

٢٢٨ اذا مدت منصفات الزوايا الاربع فى شبه المنحرف ا ب حـ ء
فتقاطع كل اثنين فى نقطة فاثبت ان المستقيم الواصل الى نقطتى
التقاطع يوازى القاعدتين وعلى بعدين متسا وبين منهما

٢٢٩ المعلوم شكل رباعى فيه كل زاويتين متقابلتين متكاملتين اثبت انه
اذا مدكل ضلعين متجاورين منه الى ان يتقابلا يكون منصفا الزاويتين
الحادثتين من تقابلها متعامدين

٢٣٠ المعلوم متوازى أضلاع ا ب حـ ء مد من راسه ب مستقيم
مواز لقطره ا حـ وانزل من نقطه ء عمود ء هـ على هذا الموازى
فقابل ب حـ فى و فاثبت أن اهِ ينصف ب و

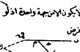
٢٣١ اذا كان منصفا زاويتين من مثلث متساويين يكون المثلث متساوى
الساقين

٢٣٢ ارسم شبه منحرف بمعلومية قاعدتيه وقطريه

٢٣٣ المعلوم مثلث ا ب حـ مدا ارتفاعاه ا ء 6 حـ هـ فتقابلا فى و فاثبت انه اذا
مدّ ا ء بمقدار ء ع يساوى و ء ووصل حـ ع تكون د ب = د ع

تعبير ثانٍ لاثبات نظرية ٦

البرهان ـ من حيث ان د ﺤ = د ﻫ فتكون (٤٨) د م = د ء
ان لم يكن ب ﻭ ॥ ﻫ ص (ش ١٦) لكانا متلاقيين وتلاقيهما لا يكون الا من جهة واحدة اذ لو
تلاقيا من الجهتين لصارا مستقيماً واحداً (٥٤) وهو خلف للفرض

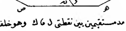


(ش ١٦)

فنفرض انهما تلاقيا من جهة اليسار فى نقطة مثل ك
ثم نتصور فصل الجزء ب ﺤ ء ﻫ من ك ﻭ م ﻫ ص كما فى الشكل الآتى



ثم ندير ب ﺤ ء ﻫ فى اتجاه الاسهم الى ان يأخذ وضعا مثل ﻫَ ءَ ﺤَ بَ وبعد ذلك نطبق هذا
الأخير على ﻭ م ﻫ ص بان نطبق اولاً المستقيم ءَ ﺤَ على مساويه م ﻫ بحيث تقع ءَ على م ، ﺤَ على ﻫ
ومن حيث ان دَ ءَ = د ء = د م فالخط ءَ ﻫَ ينطبق على م ﻭ ويأخذ اتجاهه وبالمثل
ينطبق ﺤَ بَ على ﻫ ص ويأخذ اتجاهه وعا أن م ﻭ ، ﻫ ص متلاقيان فى ك فالمستقيمان
ءَ ﻫَ ، ﺤَ بَ (اللذان هما ء ﻫ ، ﺤ ب) مثلهما يتلاقيان ايضا فى نقطة مثل ل



وعلى ذلك يكون امكن مد مستقيمين بين نقطتى ل ، ك وهو خلف (٥٤)
اذن ب ﻭ ॥ ﻫ ص وهو المطلوب